

小学校における記号と文字式の指導

渡辺 忠信*

式に表す

この連載の第7回でも書いたが、アメリカ算数・数学のカリキュラムでは式を読む・書くということがこれまであまり強調されていなかった。また「式」という日本語は英語の“equation”以外のものにも使われていることなども紹介した。しかし、今回発表された Common Core State Standard では今までとうってかわって、数の関係を式に表すことが Kindergarten（年齢的には、幼稚園年長組に対応する学年）から明記されている。例えば、

K. OA. 1

Represent addition and subtraction with objects, fingers, mental images, drawings, sounds (e. g., claps), acting out situations, verbal explanations, **expressions, or equations.**

K. OA. 2

Decompose numbers less than or equal to 10 into pairs in more than one way, e. g., by using objects or drawings, and record each decomposition by a drawing or **equation** (e. g., $5 = 2 + 3$ and $5 = 4 + 1$).

つまり、たし算・ひき算や、また10以下の数の合成・分解を具体物や絵を使って行い、その結果を絵や式を使って書き表すということである。日本のたいていの教科書では10以下の数の合成・分解はたし算・ひき算の導入前に行われるので、その関係を式に表すようなことは行われていないが、CCSSでは既にたし算・ひき算が導入されているので、こういった形になっている。アメリカのカリキュラムでのたし算・ひき算の取り扱いについては連載第5回を参考にしていただき、今回は小学校に於ける式、特に文字式及び関数的な考えの取り扱いに焦点を当ててみる。

Algebra (代数)

2000年に発表された全米数学教師協議会 (NCTM) の Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) では、小・中・高のすべてに共通の領域が示され、その1つが Algebra (直訳すれば「代数」) であった。1989年に発表された最初のスタンダードではK-4の学年枠では Patterns and Relationships というスタンダードがあったが、Algebra という用語は5-8年の枠で初めて使われている。したがって、小学校のスタンダードの領域として Algebra があるということが、多くの人に戸惑いを与

えた。なかには、小学校で方程式を教えると思った人も少なくないようである。今回の CCSS でも小学校 (K-5) の1つの領域として、Operations and Algebraic Thinking 「演算と代数的な考え」がある。しかし、ここで大切なのは小学校のレベルに置ける Algebra の学習とは何であるかということであろう。

日本の指導要領には「代数」という領域は中学校にもないものである。しかし、NCTM や CCSS のいうところの Algebra は数量関係の領域に属する、特に「式の表現と読み」と「関数の考え」にあたる。数量関係の領域が1年生までに広げられたのは今回の改訂からであるが、以前から1・2年生でもたし算・ひき算及びかけ算の式を読んだり書いたりすることの大切さは指導書などで強調されてきた事柄である。しかし、アメリカの多くの教科書やNCTMの発行する本などで強調されているのはパターンをつくったり、そのきまりをみつけたりすることの方が多かった。これは、1989年に発表された最初のNCTMスタンダードのK-4の学年の枠にあった Patterns and Relationships という項目を反映してのことだと思われる。

日本の指導要領解説書では、「関数の考え」について次のように書いてある。

関数の考えとは、数量や図形について取り扱う際に、それらの変化や対応の規則性に着目して問題を解決していく考えである。特に、伴って変わる2つの数量の関係性を考察し、特徴や傾向を表したり読み取ったりできるようにすることが大切である。(p. 58)

したがって、アメリカの教科書などでの取り扱いはどうちらかというと「規則性に着目して問題を解決」することに焦点が当てられており、「伴って変わる」という数量の関係や、数量の「対応」、そして「数量関係を表したり読み取ったりすることについてはあまり強調されていなかったと言っても過言ではない。こうしたパターン重視の考え方に対する反論もあり、2008年に発表された National Mathematics Advisory Panel の最終報告書では、“algebra”の領域でのパターン偏重を戒めている (National Mathematics Advisory Panel, 2008)。

CCSS における代数

さて、前述したように Kindergarten から導入される式に表すと言う考えはその後学年を追って行くにつれ CCSS ではどのように取り扱われているのであろうか。1年生の「演算と代数的な考え」のスタンダードにも、やはり具体物や絵、それから equations with a symbol for the unknown number (未知数を記号で表した式) などを使ってたし

*ケネソー (ジョージア) 州立大学理学部

算・ひき算の文章題を解けるようにするというものがある。ここでいう「記号」とは□や○の様なものである。2年生ではたし算・ひき算で扱われる数の範囲を広げることに焦点が当てられており、特に式に関しての新出の考えは見られない。3年生ではかけ算・わり算が導入されることで、式に表される演算が増えることになるが、それに加えて、問題解決に複数のステップが要求される問題を equations with a letter standing for the unknown quantity (未知数を文字を使って表した式) に表すことが加えられている。つまり文字式の導入である。4年生では特に目新しい考えは導入されていないが、5年生では () や { } などを含んだ式を書いたり、計算したりすること、さらに数量の関係を式に表したり、与えられた式を計算しないでその意味を読み取ることがスタンダードとして取り上げられている。6年生になると「式」はミドルスクールの数学の1つの領域として取り扱われており、文字式を書いたり、与えられた文字式にいろいろな数を代入して計算したり、計算のきまりを使い未知数をみつけ出したりすることが加えられている。

日本の指導要領と比べてみると文字式の導入がかなり早くなっている。しかし、その反面文字に表された数量にいろいろな数を代入してみるような活動は6年生まで明記されていない。一方、日本の学習指導要領ではいろいろな数を□や○などの記号を用いて式に表す活動が4年生で四則の性質を学ぶ際などにもおこなわれている。このことは記号で表された数が単に「未知数」であるのか、それとも「変数」であるかという考えの素地になることである。したがって、日本の指導要領では□や○のといった記号を使いながらも、文字式の素地を培っているといえる。ある意味で x や y といった文字は英語で毎日使われているものであるから、アメリカの子どもたちにとってなじみ深いものであるとして早く導入されることは当然かもしれない。その反面、言葉を綴るための文字が数量を表しているということは、ふだん文字をほかの目的で使っているだけに逆に戸惑う子どももいることも想像できる。次の絵は筆者らが英訳した教科書での文字式の導入単元の初めのページである。

ここで見られるのは、まず既習の考え方である□や○を使った式に表し、文字はあくまでも□や○の代わりに使われる記号であるという形で導入されていることである。つまり、児童が□や○といった記号の意味やそれを使った式の読み書きをしっかりと理解していることが大きな前提である。前述した□や○へいろいろな数を代入して計算することは、ただ計算をすることや四則の性質の理解だけでなく、□や○といった記号が果たす役割を理解することも大きな学習目標であるということである。さらに、藤井 & Stephens (2008) は記号を使って数を表すということを理解するためには、その素地として数を使った式をただの答えを導くための計算式と捉えるのではなく、計算をする前の式が1つの量を表していると捉えられることの重要性を示している。つまり低学年での式を読んだり書いたりする指導は、高学年そして中・高等学校での数学の学習への大切な基盤となるわけである。

最後に、日本の教科書などで使われている「言葉の式」という考え方も子どもたちの式の理解を助ける大切な道具であるということを強調したい。残念ながら、アメリカの教科書、及びCCSSでも言葉の式という考え方はほとんど見られない。しかしながら、問題の場面をまず言葉の式で表すということは、日常の事象を算数の場面に置き換え

7 Variables and Mathematical Equations

There are many parallelograms which have a height of 4cm. Find math sentences to find the area of these shapes.

(A) $6 \times 4 = 12$ (cm²)
 (B) $1 \times 4 = 4$ (cm²)
 (C) $5 \times 4 = 20$ (cm²)
 (D) $2 \times 4 = 8$ (cm²)

Let's think about how to write a mathematical equation!

Mathematical equations using variables

1 Let's discuss how to write a mathematical equation that shows the area of many different kinds of parallelograms that have heights of 4cm!

Please write a math sentence for the area using the length of the base as □cm and the area as ○cm!
 $\square \times 4 = \bigcirc$
 When you write a mathematical equation, you may use x and y instead of symbols like □ and ○, and write it in the following way.
 $\square \times 4 = \bigcirc \rightarrow x \times 4 = y$

Using the mathematical equation $x \times 4 = y$, please find y when x is 10, 15, 20, and 4.5.

In the mathematical equation $x \times 4 = y$, for what value of x do you have $x \times 4 = 52$?

The area of a parallelogram with a height of 4 cm can be written in one mathematical equation, $x \times 4 = y$.

Besides using the mathematical equation $x \times 4 = y$ to find the area of a parallelogram with a height of 4cm, what other relationships can you show with this equation?

z of juice is shared equally by 4 people. If y is the amount each person gets, find a mathematical equation that shows the relationship between x and y .

Let's use x and y for many different problem solving situations in the future!

東京書籍 Mathematics 5 A for Elementary School, pp. 85-86

るという重要なプロセスであり、algebraの内容として欠かすことのできない内容である。そして、問題場面を言葉の式で表すことによって、例えば小数をかける計算を導入の時などにも、「針金の全体の重さは [1メートルの重さ] × [全体の長さ (メートル)] という言葉の式で表されるから、長さが小数になっても、かけ算の計算で求められる」ということを形式不易の考えを用いて演算決定し、その後、演算方法を考えることができる。式が数量関係を表しているということを考えると、言葉の式はその関係を完全に形式化された数式と実際の数量関係をつなげる大切な橋渡しの役割を果たしていると言える。もう30年以上前になってしまったが、筆者が初めてコンピュータープログラミングを学んだ時の教授に言われたことが今でもなぜか記憶に残っている。その教授はプログラムを書く時には変数の名前になるべく言葉を使えと強調した。それは数学では形式的な式の処理の簡素化のために簡単な文字を使うが、プログラムはほかの人が読んだり、修正したりしなければならないものであるから、それぞれの変数が何を表しているのかをはっきりとすることが必要だということである。このことは文字式を教える立場に立つ者が留意しておかなければならないことではないだろうか？ 簡素化された式は確かに便利であるが、新しい概念として学んでいる子どもたちにさらに簡素化することとを求めるのは無理があるであろう。したがって言葉の式は□や○の様な記号と同様に、文字式の理解のための大切な道具であると思われる。

【参考文献】

- 藤井齊亮, & Stephens, Maxwell (2008). Using Number Sentences to Introduce the Idea of Variable. C. E. Greenes (Ed.) *Algebraic and Algebraic Thinking in School Mathematics*, 127-140. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM.
- National Mathematics Advisory Panel (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*, U. S. Department of Education: Washington, DC.