算数数学教育において
生徒はどのように学ぶべきか

概略

1. 指導(teaching)の3つのレベル
2. 授業を分析するためのTRU (The Teaching for Robust Understanding of Mathematics)の枠組み
3. A Tool:形成的アセスメントに基づく授業 (The formative Assessment Lesson)
4. どのような授業がレベル3を支えているのか : TRUを用いた分析
5. ディスカッション

1.指導(teaching)の3つのレベル

重要な数学を発展させるために児童生徒を支援するための有効な指導(teaching)

日本の数学教育の研究者や教師は，数学の教授に関する３つのレベルを明らかにしている.

- **レベル1: 重要で基本的な数学的なアイデア(事実，概念，手続き，プラクティス)を児童生徒に伝えることができる.**
- **レベル 2:児童生徒が重要で基本的な数学の内容やプラクティスを理解できるように，そのわけや理由を説明することができる.**
- **レベル 3: 児童生徒に，基本的な数学の内容やプラクティスを理解する機会を与え，自律的な学習者となるように学習を支援することができる.**

(杉山(2008)，英訳 高橋(2011))

2. 授業を分析するためのTRU (The Teaching for Robust Understanding of Mathematics) の枠組み

数学的に効果的な授業(classroom)の5つの側面

数学	認知的な要求	数学の内容へのアクセス	主体性，創出性，アイデンティティー	形成的アセスメント
議論される数学が焦点化され，一貫性をもち．かつ，(適切な場合の)手順，内容，文脈の間のつながりが扱われ，明らかにされるという側面．児童生徒は，重要な数学の内容とプラクティスを学ぶ機会や，生産的な数学的思考の習慣を発達させる機会をもつべきである．	*教室での相互作用が，児童生徒の数学的な発達の基となる，生産的で知的な挑戦の環境を創造し，保持するという側面．教師が手取り足取り教える指導と，ただ難しい問題を与えるだけとの中間に，理想的な指導がある．*	*教室での活動の組み立てが，授業で扱われる中核となる数学への，全ての児童生徒の積極的な関与を導き，支援するという側面．たとえ，どんな豊かな数学が議論されていても，少数の児童生徒が話し合いを独占するような授業は，公平ではない．*	*生徒が仮説を立て，説明し，数学的な主張をし，お互いのアイデアを組み立てる機会をもつことによって，主体性（数学的に取り組む態度）や，創出性（数学的に確かであることを認識すること）を伸ばし，結果として，数学の実行者として積極的なアイデンティティーを生み出すという側面．*	*効果的な導入や児童生徒に起こりうる誤った理解などをもとにして，教師が児童生徒の思考に寄り添い，児童生徒の考えに対応したかという側面．効果的な指導は「児童生徒の今いる場所に合わせて」彼らが前進する機会を与える．*

何が新しいのか？

改めて新しいということはない

すなわち,

あなたはTRUにおけるすべてを認め,
共鳴すべきである.

それにより私達が知っているものこそ重要であるということを理解する. そしてそれはどんな「特効薬」も驚きも提供しない.

何が違うのか

TRU は

- 包括的で -

- 研究に基づいていて-

- 覚えやすく -

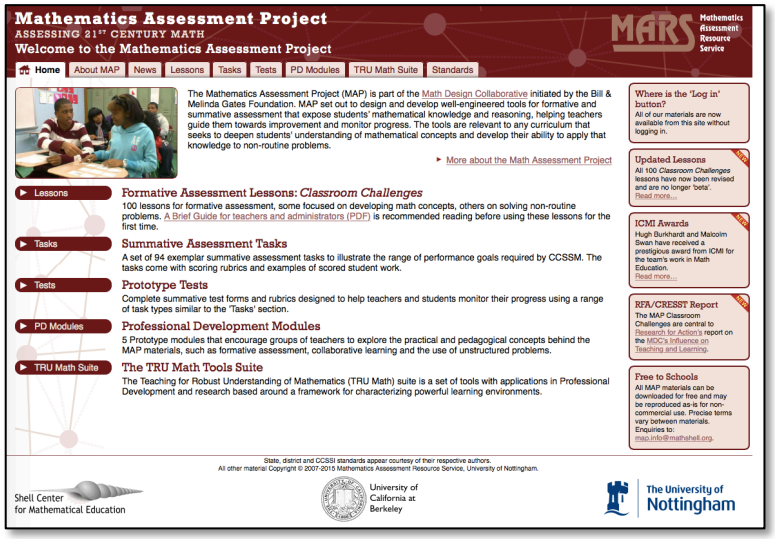
- 取り組みやすく，連携しやすい-

米国において，TRUは，授業の計画や振り返りをするための非常に有益な枠組として証明されてきた.

今夏のIMPULS授業研究イマージョンプログラムの一連の授業の中で，TRUは，授業研究に特有の重要な価値のいくつかを明確にする手段として有益であるように思われる.

The TRU Math Siteにて,
詳しい資料が利用できます.

The
Mathematics
Assessment Project
website:
http://map.mathshell.org/
にある
“TRU Math Suite”を参照



3. A Tool:形成的アセスメントに基づく授業
(The formative Assessment Lesson)

CONCEPT DEVELOPMENT

Mathematics Assessment Project
CLASSROOM CHALLENGES
A Formative Assessment Lesson

Interpreting Distance-Time Graphs

Mathematics Assessment Resource Service
University of Nottingham & UC Berkeley
Beta Version

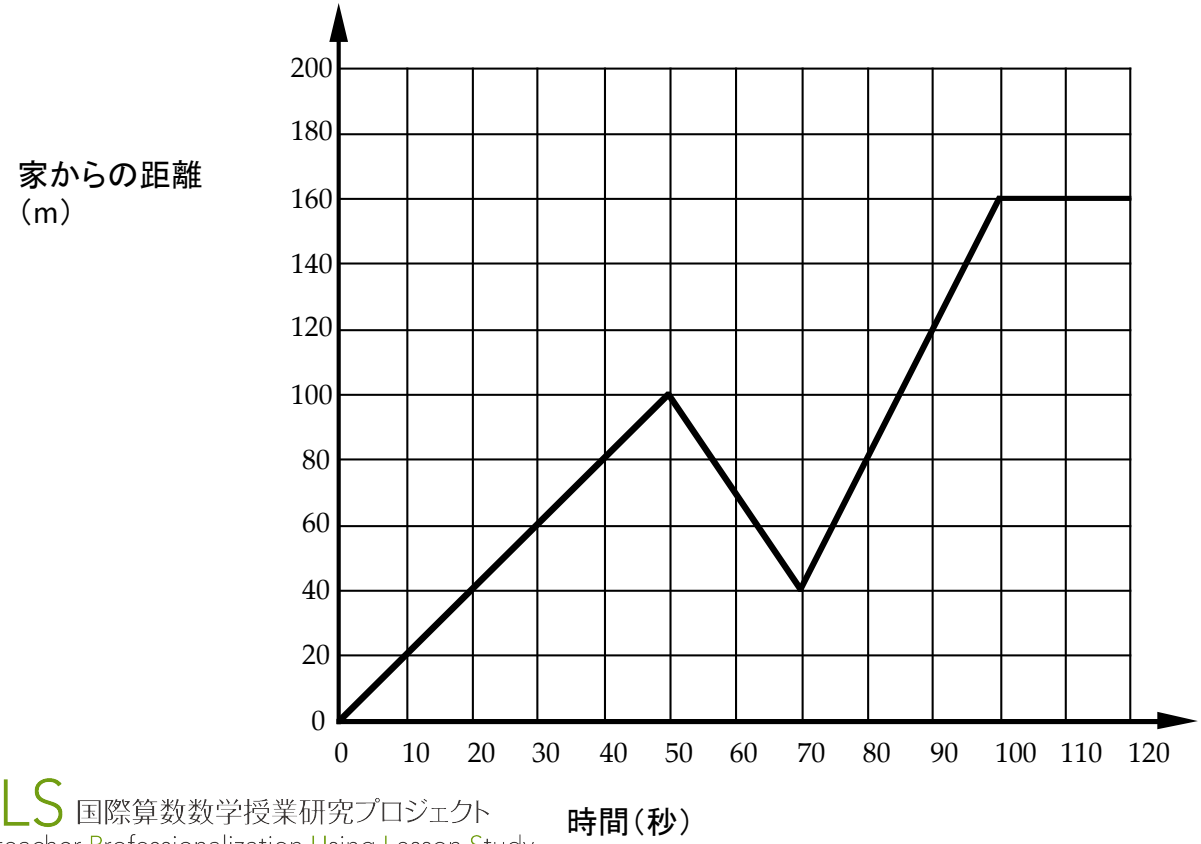
For more details, visit: http://map.mathshell.org
© 2012 MARS, Shell Center, University of Nottingham
May be reproduced, unmodified, for non-commercial purposes under the Creative Commons license detailed at http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/ - all other rights reserved

学習を計画すること

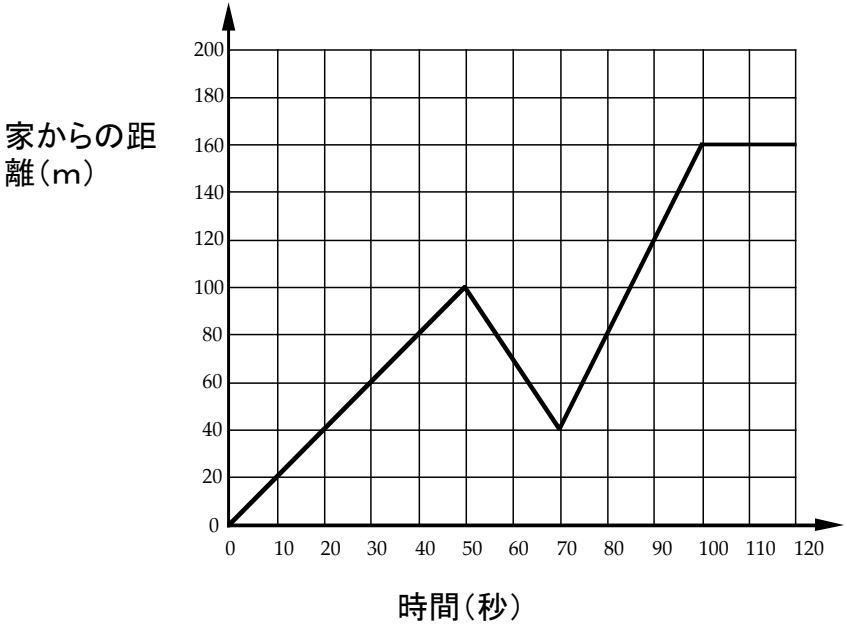
- 授業の前:
  - 児童生徒は個別に課題に取り組む
  - 教師は形成的なフィードバックを用意する
- 授業中:
  - 児童生徒は協働し，共通する問題点を明らかにするためにデザインされた，本質的な課題に取り組む
  - 児童生徒は解釈(interpretation)と推論(reasoning)の違いを議論やディベートをする
  - 児童生徒は教室の外側からのアプローチを検討する
  - 学習の鍵となるポイントに関する学級全体での議論
  - 児童生徒はフィードバックに応じ，反応を見直し，そして学習の振り返りための時間を与えられる

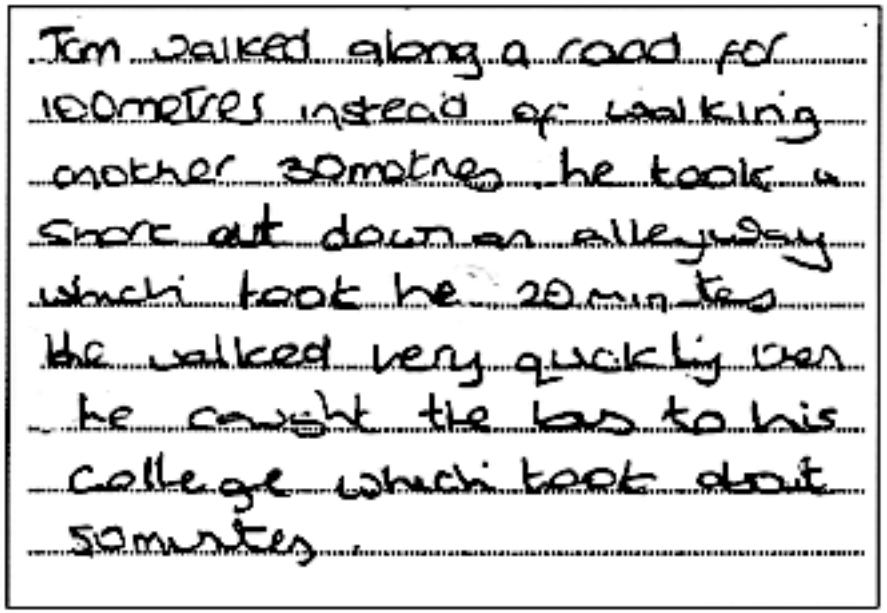
授業の前:

毎朝，トムは家からバス停まで，160メートルのまっすぐな道を歩きます．グラフはある日の彼の行程を示しています．何が起こったと思いますか． グラフは現実的ですか．説明しなさい．



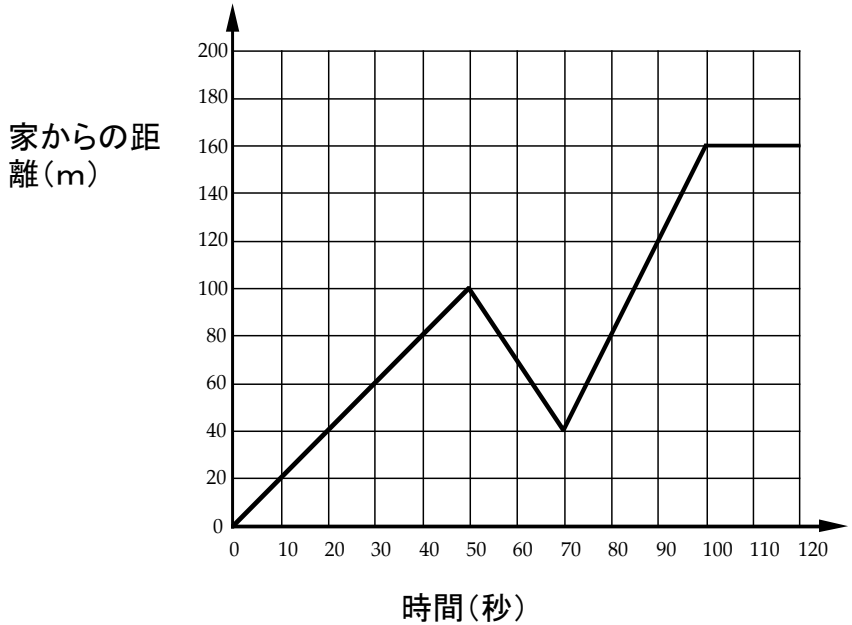
時間-距離グラフ: アリスの反応

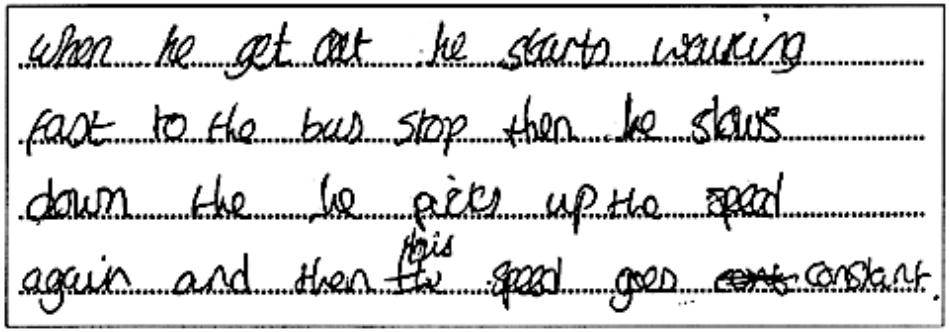



Tom walked along a road for 100metres instead of walking another 30metres, he took a short cut down an alleyway which took he 20minutes the walked very quickly then he caught the bus to his college which took about 50minutes.

「トムは道路に沿って100メートル歩いた．あと30メートル歩く代わりに，20分かかる抜け道を通って近道をした．彼はとても早く走って，約50分かかる大学行きのバスに乗った．」

時間-距離グラフ: ベンの反応




when he get out he starts walking fast to the bus stop then he slows down the he picks up the speed again and then ~~the~~ this speed goes ~~cons~~ constant.

外に出ると，彼はバス停に向かって速く歩き始め，そのあとスピードを落とし，また再びスピードを上げ，そしてそのスピードは一定だ.

児童生徒の典型的な誤概念を示すと…

共通する問題点	考えうる発問や助言
子どもはグラフを絵として解釈する 例：グラフが上下すると，トムの通り道も上下する．	• もしある人が，一定の速さで，丘を登ったり下ったりすると，家からの距離を表すグラフはどのようになりますか．
子どもは時間と速さのグラフとして解釈する 例：子どもは正の傾きを加速，負の傾きを減速と解釈していた．	• 家から離れているか，家に向かっているかは，どのように見分けられますか．
子どもは距離または時間に言及することができない 例：子どもは，その行程のいくつか/全ての部分の速さを理解していなかった．	• トムがそれぞれの区間でどのくらい移動したかについて，もっと多くのことがわかりませんか．
子どもは速さを計算したり，表現したりすることができない	• それぞれの区間での，トムの速さについて説明できませんか．
子どもは，なぜそのグラフが現実的か，現実的でないかについて，ほとんど説明をしない	• トムの最も早い速さは現実的ですか．トムの最も遅い速さは現実的ですか．それはなぜですか．

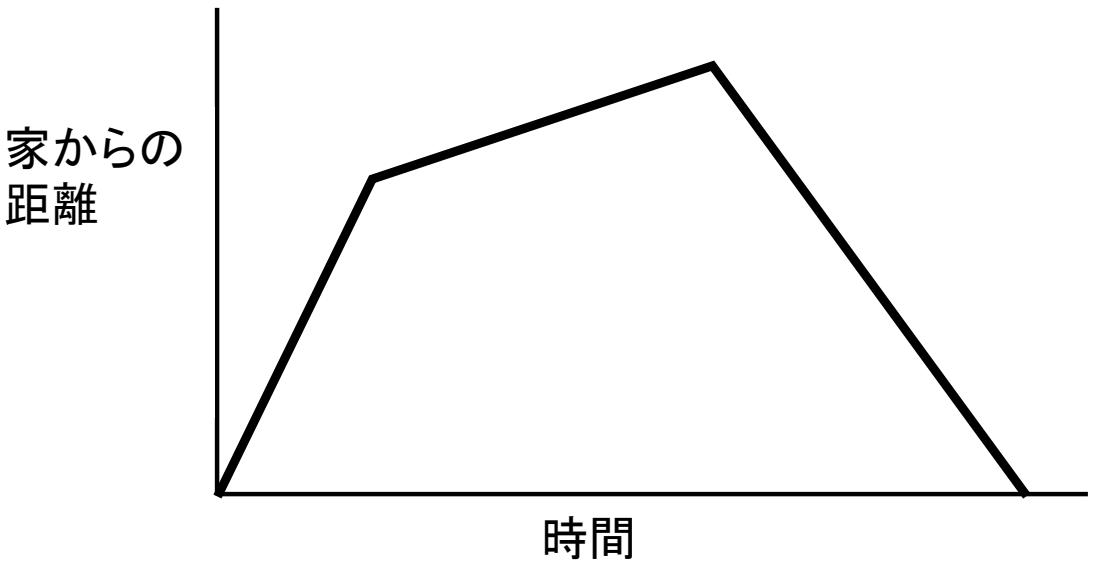
授業そのものは，診断的な課題から始まる･･･

グラフにストーリーを結びつけること

A. トムは犬と公園へ出かけた．彼はゆっくり出発し，徐々にペースを上げた．公園に着くとトムは向きを変え，ゆっくり歩いて家に帰った．

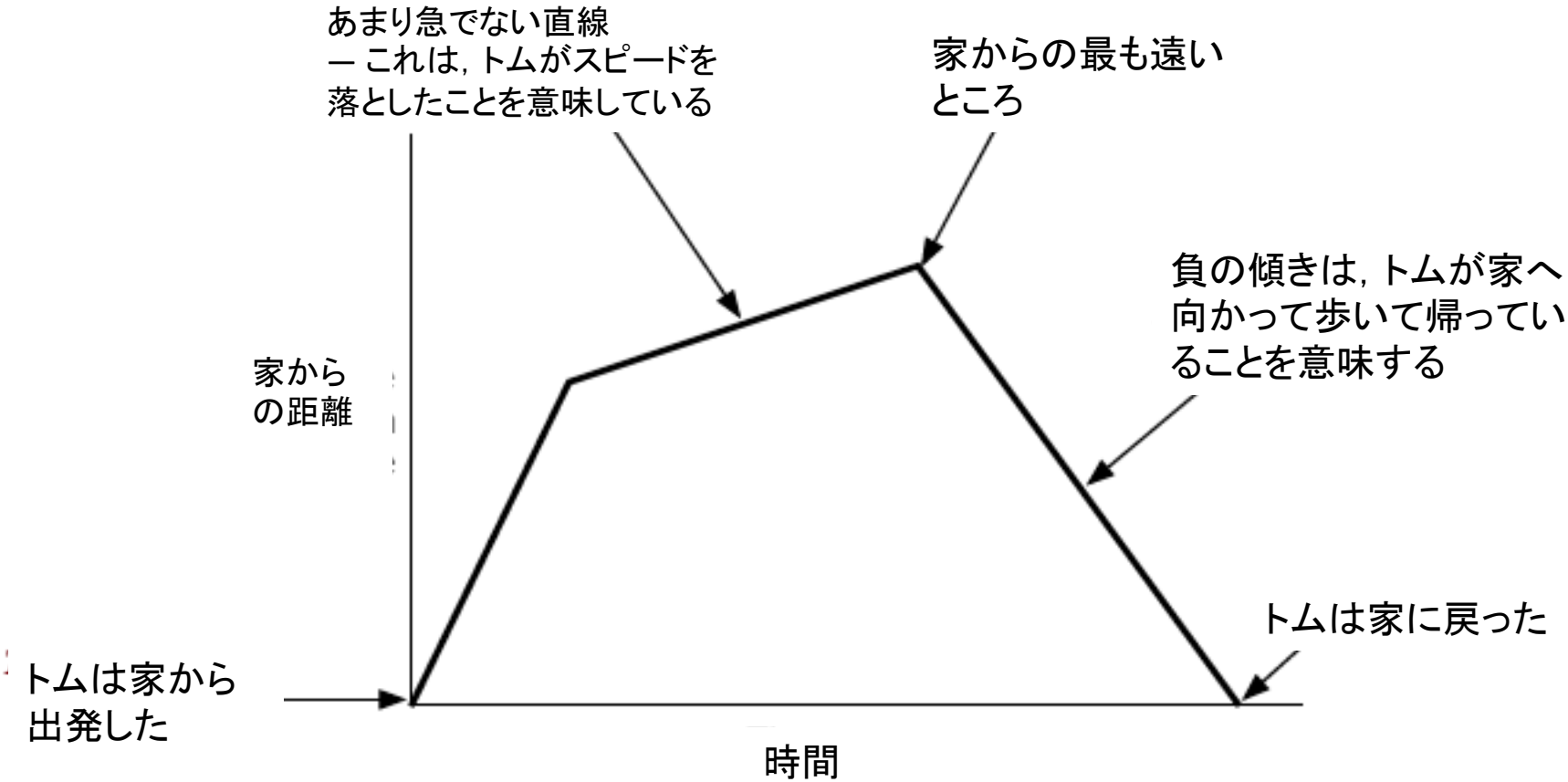
B. トムは自転車に乗って，家から東側へ，急勾配の丘を上った．しばらくすると，傾斜はゆるやかになった．彼は頂上に着くと，反対側の斜面を大急ぎで下った．

C. トムはジョギングに出かけた．道の突き当りで友人にばったり会い，ペースが遅くなった．友人と別れた後，トムは急いで家に戻った．



児童生徒は，注釈を付けて説明するように求められると．．．

グラフは結局このように見える



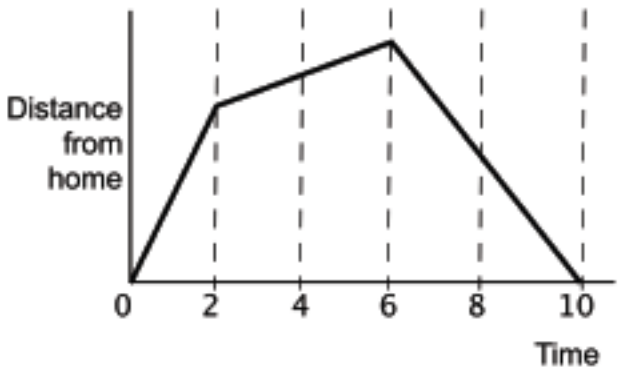
ストーリーをグラフに結びつけること—児童生徒はポスターを作る

児童生徒はグラフを表に変えることに取り組む:

学級全体での議論：表の解釈（15分）

学級を1つにして，児童生徒ひとりひとりに小さなホワイトボード，ペン，クリーナーを与える．プロジェクターでスライド5)を表示：

グラフに合うデータを作ること

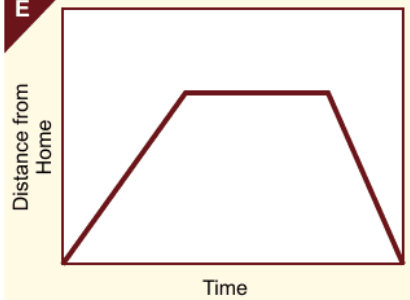


Time	Distance
0	
2	
4	
6	
8	
10	

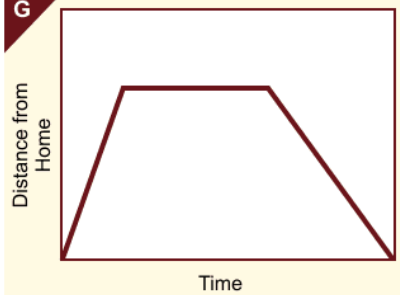
あなたのホワイトボードに，トムの行程においてありうる時間と距離を示す表を作りなさい．

表がカード合わせに追加される・・・

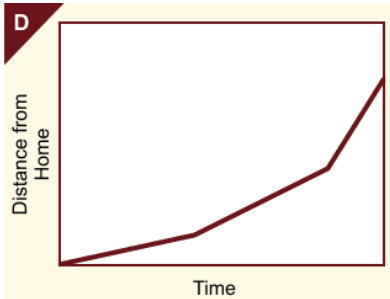
E



G



D



2

トムの家の反対側は丘である．
トムは丘をゆっくりと登り，頂上を越えると，反対側の斜面を駆け下りた．

1

トムは家からバス停へ走り，バスを待っていた．
彼はバスに乗りそこなったことに気づき，歩いて家に帰った．

6

トムは歩いて突き当りにあるお店まで行き，新聞を買い，そして走って帰った．

Q

Time	Distance
0	0
1	10
2	20
3	40
4	60
5	120

P

Time	Distance
0	0
1	40
2	40
3	40
4	20
5	0

T

Time	Distance
0	0
1	20
2	40
3	40
4	40
5	0

そして，学級で一緒に解決を比較する

5
Tom left his home for a run, but he was unfit and gradually came to a stop!

B.

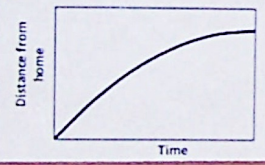
Time	Distance
0	0
1	10
2	20
3	40
4	60
5	120

6.
Tom walked to the store at the end of his street, bought a newspaper, then ran all the way back.

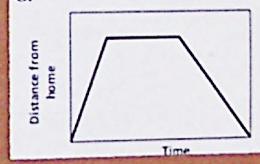
A.

Time	Distance
0	0
1	40
2	40
3	40
4	20
5	0

A.



G.

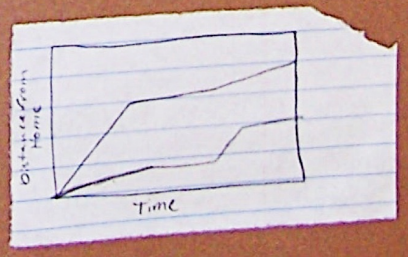


7.
Tom went out for a walk with some friends when he suddenly realised he had left his wallet behind. He ran home to get it and then had to run to catch up with the others.

F.

Time	Distance
0	0
1	30
2	60
3	0
4	60
5	120

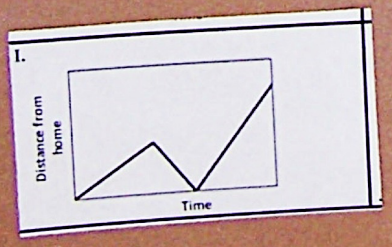
8.
This graph is just plain wrong. How can Tom be in two places at once?



A.

Time	Dist.
1	0
2	20
3	40
4	60
5	80
1	0
2	10
3	14
4	20
5	20

I.



9.
After the party, Tom walked slowly all the way home.

I

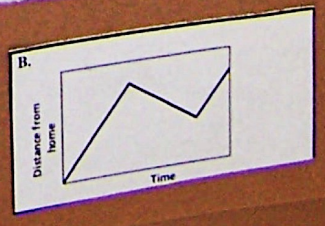
Time	Distance
0	120
1	96
2	72
3	48
4	24
5	0

10.
Tom jogged to the park wanted a water jogged back to the store then jogged back to the park.

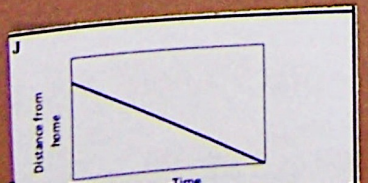
D.

Time	Distance
0	0
1	80
2	60
3	40
4	80
5	80

B.



J



4. どのような授業がレベル3の指導（teaching）を支えているのか：TRUを用いた分析

この授業について，TRUを用いて一つずつ見ていきましょう

数　学

どれぐらい正確で，一貫性があり，正当化できる数学の内容であるか.

この授業は傾きのような概念を深く理解させることに焦点をあて，それを現実世界の事象を表現するために用いる．それは様々な表現(グラフ，表，ストーリー)を関連づける機会を提供する.

認知的な要求

児童生徒が数学の概念をつかみ,
その意味がわかるようになるためには,
どの程度まで支援されるべきか.

カード合わせやポスター製作は，意味がわかることに十分な機会を与える．もし，児童生徒が必要に応じて徐々に足場をかけられたのであれば.(支援のための発問のリストを参照)

数学の内容へのアクセス

すべての児童生徒を授業内容へアクセスさせるために
教師はどの程度支援するか.

学級全体での会話，小集団での活動，児童生徒のポスターの発表を含む授業の構造は，すべての児童生徒が数学に有意義に関わるための支援の機会を教師に提供する．しかし．．．これには，相当な労力が必要となる．たとえ好機だとしても.

主体性，創出性，アイデンティティー

児童生徒が発想の源やそれらの議論の発信源に
どの程度なりうるか.
児童生徒の発言(contribution)は
どのように形成されるのか.

学級全体での会話，小集団での活動，児童生徒のポスターの発表を含む授業の構造は，すべての児童生徒が強力な数学的アイデンティティーを構築するための支援の機会を教師に提供する.
しかし．．．これには，相当な労力が必要となる.
たとえ好機だとしても.

形成的アセスメント

児童生徒の数学的思考は，どの程度表面化されるか．児童生徒の考えに潜在的な価値がある場合，どのくらいその考えに基づいて指導(instruction)をするのか．誤った理解が生じている場合，どの程度，それに関わった指導をするのか．

・・・の理由で，それらは
形成的アセスメントレッスンと呼ばれている
☺

<table>
<tr><th></th><th>学習者の行くべき場所</th><th>学習者の今いる場所</th><th>そこへ行き方</th></tr>
<tr><td>教師</td><td rowspan="3">1. 学習の意図と成功基準を明らかにし，理解し，共有する</td><td>2. 効果的な教室の議論や，児童生徒が理解していることの証拠を明らかにするための別の課題を設計する</td><td>3. 児童生徒の学習を前進させるフィードバックを与える</td></tr>
<tr><td>仲間</td><td colspan="2">4. 児童生徒をお互いのために教育的なリソースとして活動させる</td></tr>
<tr><td>学習者</td><td colspan="2">5. 児童生徒を自身の学びの所有者として活動させる</td></tr>
</table>

Wiliam, and Thompson (2007)

ありがとうございます

Thank you

ディスカッション