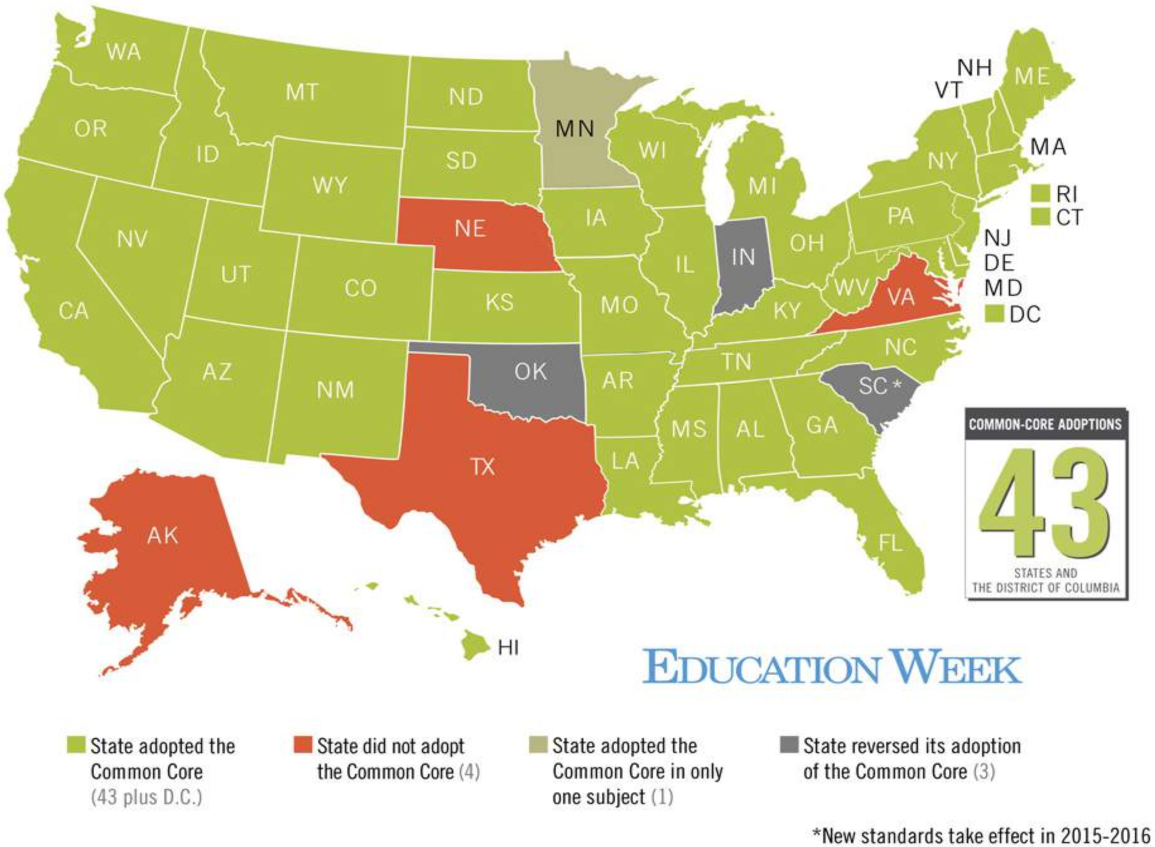
生徒は数学の何を学ぶべきか？

近年の移行におけるアメリカの答え

Phil Daro, common core state standards執筆者

Common Coreを採用した州



Common Core

Common Coreを執筆する際に，私たちは日本の方法を研究しました.

- 私たちは何を見たか?

日本の方法について私たちが賞賛したこと

- 小学校段階における，問題解決の授業（*Problem based lessons）
- カリキュラムの一貫性
- 学年をまたいだ概念の発展 (学習軌跡): いかに概念を組み立てるか
- 題材（topics）間の一貫性
- 他の生徒が理解できるような説明をうみだす，生徒の自立性

私たちも 21世紀への見通しをたてました

- 私たちは何を見たか?

自立した学習者

職はとても早く変化しており，自立した学習者として成長することが生徒に要求されている

柔軟に考える人，数学の柔軟な利用

数学化する過程の定義づけ：数学的プラクティス（Mathematical Practice ）のためのスタンダード

数学的プラクティスの基準
（＊Mathematical Practice ）

1. 複雑な問題の意味を理解し，それを根気よく解決する.
2. 抽象的に,量的に推論する
3. 説得力のある主張を構成し，他者の推論を批評する
4. 数学を使ってモデル化する
5. 適切なツールを戦略的に用いる
6. 正確さを求め続ける
7. 構造を探求し,それを活用する
8. 推論を積み重ねる中で,規則性を求めてそれを表現する

Common Core State Standards

数学的プラクティス
（＊Mathematical Practices）

- 教師ではなく，生徒の活動
- 内容と一緒に高められるべき数学的過程を説明すること:
  - 内容はプラクティスのなかに組み込まれている
  - プラクティスは内容のなかに組み込まれている
- 数学の過程を追考する力を育てるために時間をかけ，内容の焦点化と一貫性を維持する
- 数学的特性(*character)についての内容を説明する

数学: 3 つのデザインゴール

1. **焦点: それぞれの題材のなかで, いかに題材がより大きな数学の構造のなかに適合するか** (年齢の適切性)
2. **一貫性**: 学年をまたいで: 前の知識の上に組み立てたてる (真新しさと深めていくこと), 将来の知識へのドアを開ける;そして, 学年のなかで主要な題材と**リンク**させる
3. **深さ: 数学的過程**（Mathematical processes）は 生活に内容をもたらし, 内容の意味づけをする

数学的モデルと問題を構成する

- 現実世界の文脈のなかで，アクセス可能な問題を特定する
- 状況を単純化するための適切な仮定をおく
- 状況を数学的に表現する
- 状況のなかの重要な変数を特定する
- 変数の間の関係を生成する

日本に，何人の歯医者が必要だろうか？

- 生徒は，どの変数が関係しているか，どのデータが利用可能か，変数間の関係，について考えなければならない
- 生徒は仮定を作ったり守ったり，異なる仮定のもとでのモデルのふるまいについて考える
- 英国のMalcolm Swan教授による，生徒の行った方法を参考にして，このように考えるかもしれない

重要な変数	名前		概算
人口の大きさ	p	人	
歯医者の予約をする時間の長さ	t	時間	
一日あたりの労働時間	n	時間	
週あたりの労働日数	d	日	
年間あたりの労働週数	w	週	
一人あたりの年間予約数	a	予約	

導かれた関係	関係	概算
一日あたり歯医者にかかる人数	$n \div t$	
週当たりの予約数	$d(n \div t)$	
年間あたりの予約数	$dw\ (n \div t)$	
年間あたりの患者数	$dw\ (n \div t) \div a$	
必要な歯医者の人数	$\boldsymbol{p \div (dw\ (n \div t) \div a)}$	

学習ゴール	生徒の成果	課題と活動の“ジャンル”
事実に基づいき思い出す能力 手続きの流暢さ	• 技術的パフォーマンス	• 暗記と練習
概念的理解 (推論とコミュニケーション)	• 分類と定義付け	• 仕分け, 分類, 定義付け, 推定
	• 象徴	• 説明, 解釈, 翻訳
	• 分析	• 構造･変動･関係の探求
	• 議論と証明	• テスト, 正当化, 推測の証明
数学的リテラシー 問題解決	• 数学的モデル	• モデルと課題の構成
	• 解決	• 問題解決のための戦略の利用
	• 批判的解説	• 答えと戦略の解釈と評価

学習ゴール	生徒の成果	課題と活動の“ジャンル”
事実に基づいき思い出す能力 手続きの流暢さ	• **技術的パフォーマンス**	• 暗記と練習

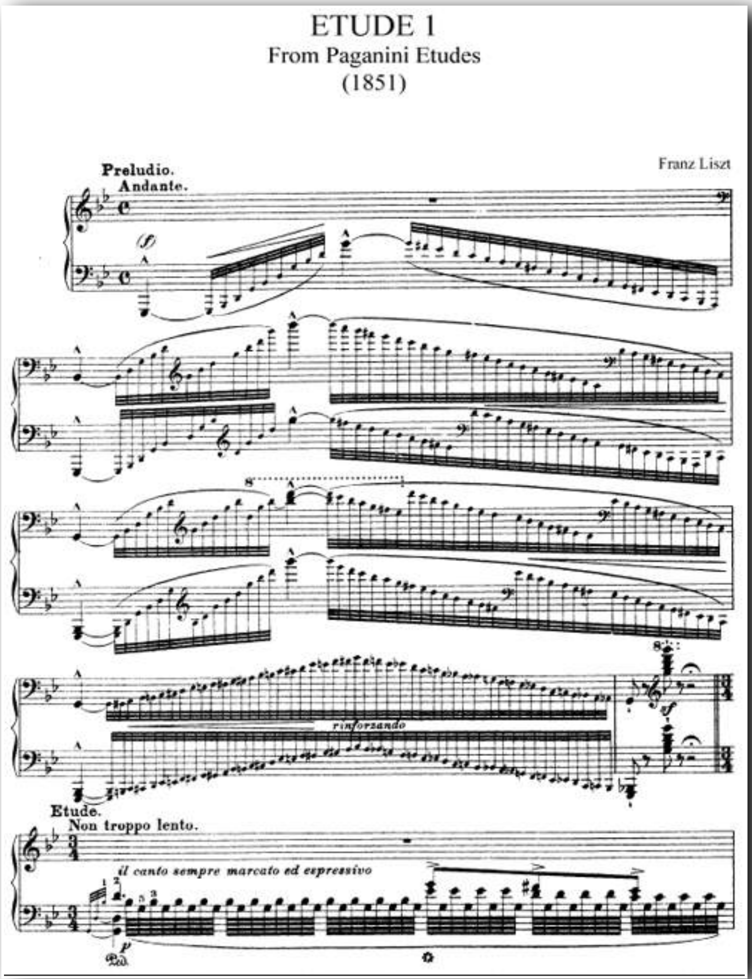
暗記と練習

生徒は:

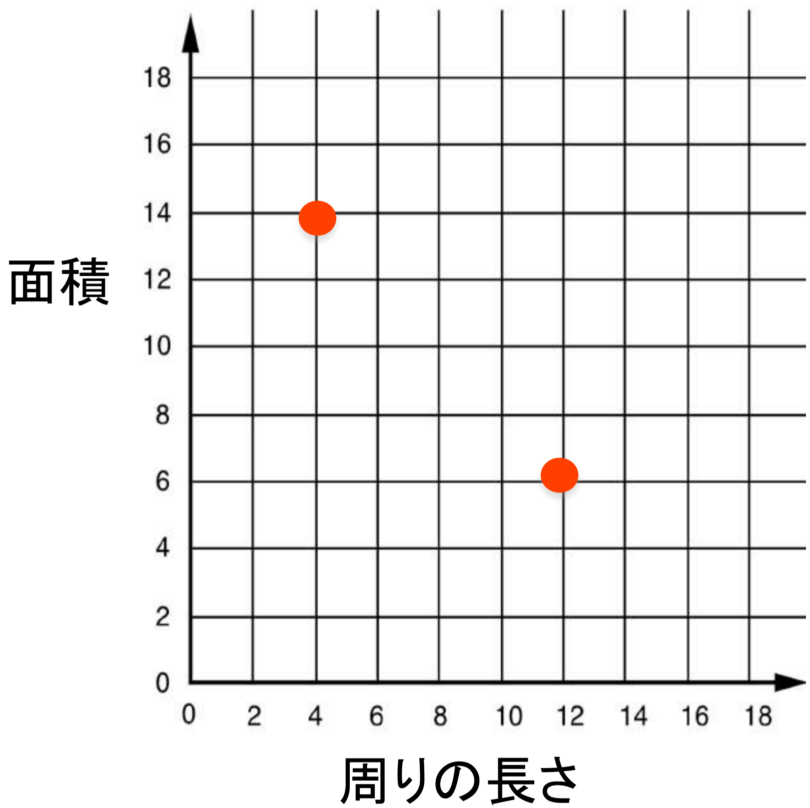
- 意味がありおもしろい“エチュード”を通して，よく明確化された手続きを練習するでしょう
- 数学的用語と表記法により，体系的に流暢さを開発していくでしょう

“エチュードÉTUDE”の概念

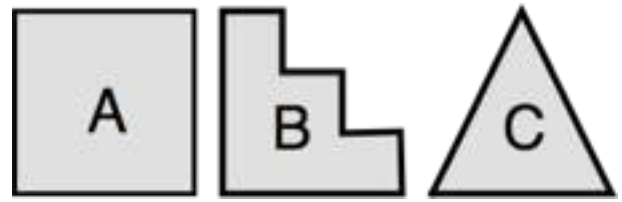
ある音楽の構成であり，単独の楽器のための，技術的練習または技術的技巧を開発するためにデザインされ，その，本質的な芸術的良さのために演奏されるもの



数学的エチュード（ÉTUDE）



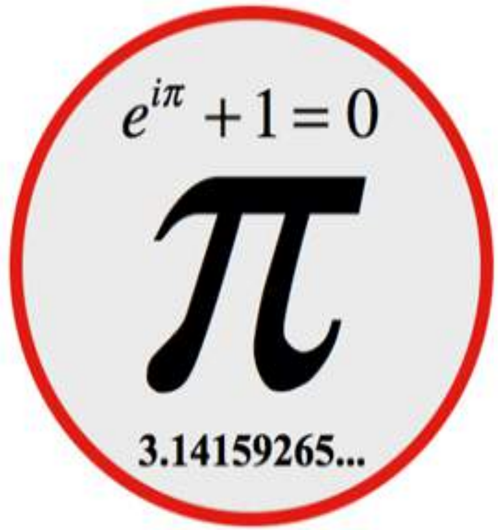
図形を表す点をプロットせよ:



点 (12,4)と，点 (4,12)を表す図形を描きなさい

どの点が，正方形，三角形．．．を表しますか?

どの点が，「不可能」な図形を表しますか？



結びつけられた数学的思考

数学の統一性を理解する

上記の数式は数学におけるすべての基本的な定数と操作を含んでいる:

0　　1　　π　　e　　i　　+　　×　　exp

どのようにしたら私たちは，数学の大きなつながりを子どもたちに理解させ使えるようにすることができるだろうか.

第3学年

数字の1,3,4を，それぞれちょうど一度だけ使い:

(a) あなたが作れる3桁の数を全て見つけなさい.あなたはどうしてそれが全てであるとわかったのか?

(b) 最大のものはどれですか？最小のものは？どうやってわかるのか？

(c) それらの組で最も互いに近い組はどれか?どうやってわかるのか？

(d) これら全ての数の合計(または平均)を出しなさい.これらを計算するためのうまい方法を見つけられたか？

小さいものから大きいものに並べる

(a) & (b) 134 143 314 341 413 431

(c) 百の位の数字を同じにし，十の位と一の位をそれぞれ互いにできるだけ近い数字にする.

a, b, c; $b > c$.

$$abc - acb = (10b + c) - (10c + b)$$
$$= 10(b - c) - (b - c) = 9(b - c)$$

$b - c$ をできるだけ小さくするために，$b = 4$, $c = 3$,とすると，

$143 - 134 = 9$.

(d) それぞれの位で，それぞれの数字が2度現れる.

$1 + 3 + 4 = 8$ だから, 6個すべての数の和は，

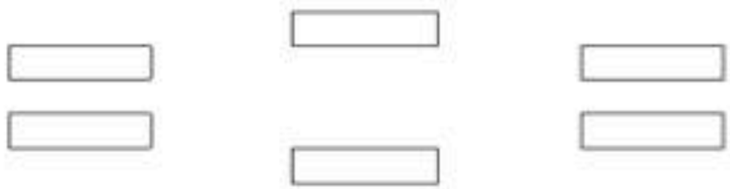
$16 \times 111 = 1776$

結び付けられた問題の構造

子どもたちに共通の構造を見つけ，統合する機会を与える教育的デザイン．新しい問題解決のジャンル．

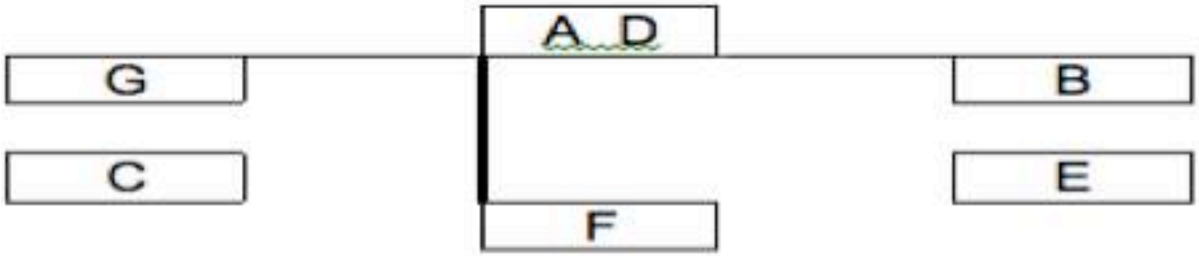
- **CSPS**とは何か？
- 次の重層の課題にある（4-14という）問題の集合
  - 問題を<u>解決する</u>
  - それぞれの問題において明らかに含まれる数学的<u>構造</u>を<u>見つけ，統合する</u>.
  - 問題がどのようにはっきりと異なるのかを説明する.
- 最初に，（テストの前や後に用いる）準備の例である.

6つの空いた箱のいずれかに，以下のそれぞれの問題の手紙を配置する．もし，文脈の表面上の違いを離れて数学的に同じ問題なら，同じ箱の中に手紙を置く．もし，違う箱の中の問題が，根本的に数学的な構造が密接に関係するなら，線によってそれらの箱をつなげる，または，もしそのつながりがとてもつよいなら二重線でつなげる．（あなたは全ての箱を使う必要はなく，あなたは合理的に個々の問題を完ぺきに解くかどうかの質問に答えるかもしれない．）



A:1，2，3の数字を使い，どの数字も一回だけ使ってできる3ケタの数字はなにか？
B:あなたは，小さな島のまわりを船でこいでいて，その島には，木，小屋，旗竿がある．あなたが島をみるとき，左，真ん中，右と順にそれらをみる．島のまわりをすべてこぐとき，あなたが見る異なる順のすべてはなにか？
C:9人の子どもたちの中で，3人のチームをとる方法は何種類か？
D:昭彦君とTad君と斉亮君が徒競走をして，その間に関係がないとき，全ての起こり得る結果はどんなか？：一番目は？二番目は？三番目は？
E:青色，緑色，赤色のボールでいっぱいのバッグから私はランダムに3つのボールを選ぶ．私がとり得る色の組み合わせはどんなか？
F:3×3の正方形上の格子で，それぞれの行，列に青色の正方形が確実に存在するように9つのある正方形のいくつかを青色にぬる．こうするために何種類あるか？
G:正三角形の対称性の全てはなにか？

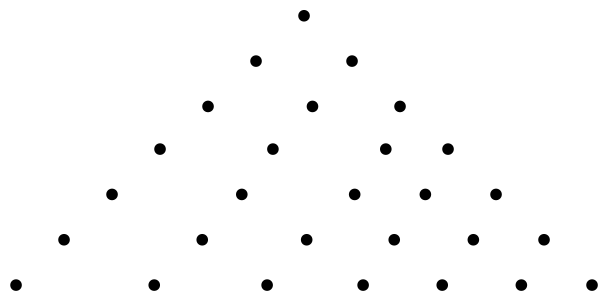
解法



A:1，2，3の数字を使い，どの数字も一回だけ使ってできる3ケタの数字はなにか？
B:あなたは，小さな島のまわりを船でこいでいて，その島には，木，小屋，旗竿がある．あなたが島をみるとき，左，真ん中，右と順にそれらをみる．島のまわりをすべてこぐとき，あなたが見る異なる順のすべてはなにか？
C:9人の子どもたちの中で，3人のチームをとる方法は何種類か？
D:昭彦君とTad君と斉亮君が徒競走をして，その間に関係がないとき，全ての起こり得る結果はどんなか？：一番目は？二番目は？三番目は？
E:青色，緑色，赤色のボールでいっぱいのバッグから私はランダムに3つのボールを選ぶ．私がとり得る色の組み合わせはどんなか？
F:3×3の正方形上の格子で，それぞれの行，列に青色の正方形が確実に存在するように9つのある正方形のいくつかを青色にぬる．こうするために何種類あるか？
G:正三角形の対称性の全てはなにか？

Pascal CSPS (14-choose-4)

1. **(タクシーの幾何)**. タクシーは，1つの角から10ブロック北に，4ブロック東の他の角に（効果的に）運転したい．起こり得る道順は何通りか？
2. **(三角形の図)** 三角形のアレイ図で，



. . continued . . .

それぞれの点とその点のちょうど下の2つの一番近い点を辺でつなげる．どの点も一番上の点からそれ以下の点の“辺の道”の数を書く．15行目で左から5番目の数値はなにか？

3. **(線上を歩く)**数直線上で，0から出発して，あなたは14動く．どのステップも右に距離1または左に距離1をとり，そのような方法であなたは−6で終わる．このようにするために何通りの方法があるか？
4. **(固定されていないタワー)**固定されていない10の白いキューブと4の赤いキューブを使って，何種類の違う14のキューブタワーをつくることができるか？
5. **(サッカーの得点の進行)** ホームチームがサッカーの試合で10対4で勝った．試合の経過で全ての起こり得る得点の順序はなにか？
6. **(チームを選ぶ)**14人のクラスの中で，4人の生徒のチームを選択する必要がある．こうするために，何種類の違う選択があるか？
7. **(2つのビンの中のボール)**10個のボールは，ビンAに，4個のボールはビンBにあるように，2つのビンの中に14個のボールを置く全ての方法はなにか？
8. **(リボンを切る)**15インチのリボンを5つに分け，それぞれの長さが整数インチにする．このようにするための方法はいくつあるか？
9. **(二項定理)** 多項式 $(1 + y)^{14}$で， y^4 の係数はなにか？

Measure Exchange CSPS

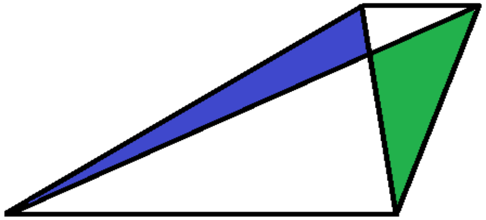
1. **(Tea & wine)** 私は1バレルのワインを持っていて，あなたは1杯の緑茶を持っています．私はティースプーン1杯のワインをあなたのティーカップに入れます．そして，ティーカップでまぜたティースプーンを持って，それを私のワインバレルに入れ戻してください．問題：今，ワインバレルのなかの緑茶よりも，ティーカップの中のワインのほうが多いでしょうか，あるいは，その他の状態でしょうか？

2. **(Heads up)** ペニーの集まりをテーブルにおきます．そのなかでできるだけ表（顔のあるほう）が多くなるようにランダムにコインを選んでもらいます．次に，あなたの選んだコインを戻してもらいます．そして，あなたにに言います：補集合のなか The number of heads now showing in your group is the same as the number of heads in the complementary group. 問題:それを私がどのように知るか？

3. **(Faces up)** 私はあなたを目隠しして，スタンダードなデッキの前に52枚のカードをひとまとめ（1つの山）におきます．私はデッキのどこかに，正確に13枚のカードを表におきます．あなたのチャレンジは，目隠しをしたままで，同じ数ずつ表向きのカードがあるように2つの山にすることです．

4. **(Triangle medians)** 三角形において，2つの頂点からの中点で，中点とだけ交わるように2つの三角形をつくる.2つの三角形の面積はどのように関係しているか？もっと正確に，三角形ABCとしてみる．A’ はACの中点とし，B’はBCの中点とし，D をAB’ とBA’の交点とする．How are the areas of AA’D と BB’Dの面積はどのように関係しているか？

5. **(Trapezoid diagonals)** 図は4つの三角形に分けられた台形である． 角を挟んだ三角形(平行のほうではなく)の面積の関係は何か？



$$1/m \quad + \quad 1/n \quad = \quad 1/2$$

- ２つの単位分数の合計が1/2 になるすべての方法は何か？
- これが，次のスライドにまとめた CSPSの最初の問題です.
- ２番目の問題は:面積と周りの長さが数値的に等しいwith integer side lengthsなすべての長方形をみつけなさい
- **$mn = 2(m + n)$**

Essentia
Project

ARITHMETIC

Ar1. Find all ways to express ½ as the sum of two unit fractions (i.e. fractions of the form $1/n$, n a positive integer).

Ar2. Find all rectangles with integer side lengths whose area and perimeter are numerically equal.

Ar3. The product of two integers is positive and twice their sum. What could these integers be?

Ar4. For which integers $n > 1$ does $n - 2$ divide $2n$?

RATES

R1. Which pairs of positive integers have harmonic mean equal to 4?(*)

(*) The harmonic mean h of n numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$: $1/h$ is the average of $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n$

R2. Nan can paint a house in n days, and her Mom can paint it in m days (n and m positive integers). Working together they can paint the house in 2 days. What are the possible values of (n, m)?

R3. A turtle travels up a hill at n miles per hour, and returns down the hill at m miles per hour ($n \leq m$ integers). Its average speed for the round trip is 4 miles per hour. What are the possible values of (n, m)?

GEOMETRY

G1. Given a point P in the plane, find all integers n such that a small circular disk centered at P can by covered by non-overlapping congruent tiles shaped like regular n-gons that have P as a common vertex.

G2. Two vertical poles, N and M, have heights n meters and m meters, respectively, with n and m integers. A wire is stretched from the top of pole N to the base of pole M, and another wire is stretched from the top of pole M to the base of pole N. These wires cross at a point 2 meters above the ground. What are the possible values of (n, m)?

G3. The base b and corresponding height h of a triangle are integers. A 2 x 2 square is inscribed in the triangle with one side on the given base, and other vertices on the other two sides. What are the possible values of the pair (b, h)?

ALGEBRA

Al1. For which positive numbers s does $p(x) = x^2 - sx + 2s$ have integer roots?

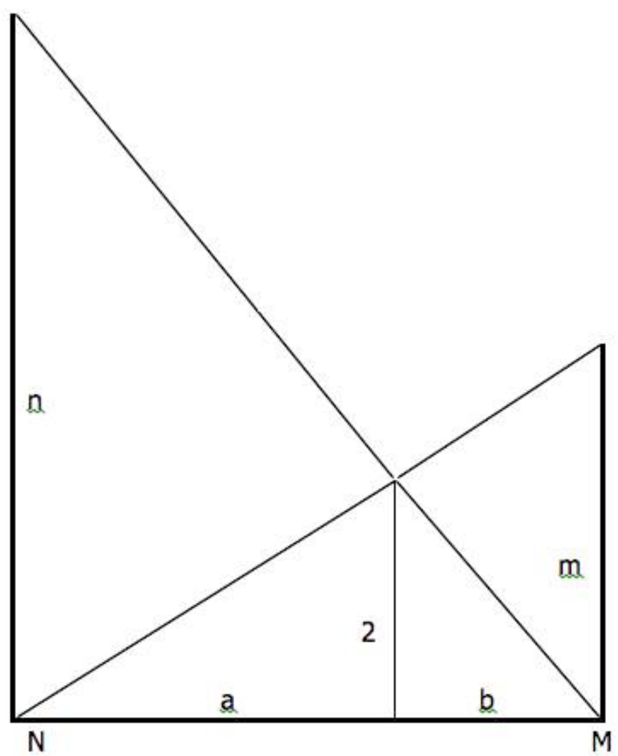
Al2. Let u be a positive real number. Find all solutions (n, m, v) with n and m positive integers, and $v > 0$, of the equations:

$$(uv)^2 = u^n = v^m$$

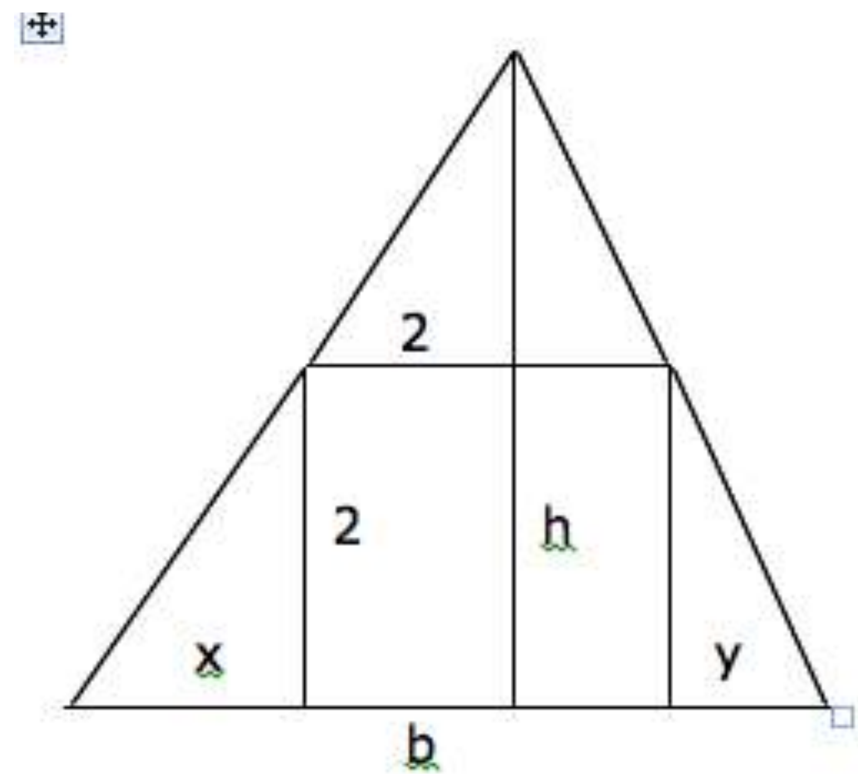
Al3 Let (r, b) be positive integers > 1. In a bin there are exactly r red balls, and b blue balls, and $r \cdot b$ balls in all. For which (r, b) is there a 50-50 chance that a randomly chosen ball will be either red or blue?

IMF
International M

G2



G3



AI1 どのような正のSに対して $p(x) = x^2 - sx + 2s$ は整数の根をもつか?

ARITHMETIC

Ar1. Find all ways to express ½ as the sum of two unit fractions (i.e. fractions of the form 1/n, n a positive integer).

Ar2. Find all rectangles with integer side lengths whose area and perimeter are numerically equal.

Ar3. The product of two integers is positive and twice their sum. What could these integers be?

Ar4. For which integers n > 1 does n – 2 divide 2n?

RATES

R1. Which pairs of positive integers have harmonic mean equal to 4?(*)

(*) The harmonic mean h of n numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$: 1/h is the average of $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n$

R2. Nan can paint a house in n days, and her Mom can paint it in m days (n and m positive integers). Working together they can paint the house in 2 days. What are the possible values of (n, m)?

R3. A turtle travels up a hill at n miles per hour, and returns down the hill at m miles per hour (n ≤ m integers). Its average speed for the round trip is 4 miles per hour. What are the possible values of (n, m)?

GEOMETRY

G1. Given a point P in the plane, find all integers n such that a small circular disk centered at P can by covered by non-overlapping congruent tiles shaped like regular n-gons that have P as a common vertex.

G2. Two vertical poles, N and M, have heights n meters and m meters, respectively, with n and m integers. A wire is stretched from the top of pole N to the base of pole M, and another wire is stretched from the top of pole M to the base of pole N. These wires cross at a point 2 meters above the ground. What are the possible values of (n, m)?

G3. The base b and corresponding height h of a triangle are integers. A 2 x 2 square is inscribed in the triangle with one side on the given base, and other vertices on the other two sides. What are the possible values of the pair (b, h)?

ALGEBRA

Al1. For which positive numbers s does $p(x) = x^2 - sx + 2s$ have integer roots?

Al2. Let u be a positive real number. Find all solutions (n, m, v) with n and m positive integers, and v > 0, of the equations:

$$(uv)^2 = u^n = v^m$$

Al3 Let (r, b) be positive integers > 1. In a bin there are exactly r red balls, and b blue balls, and r•b balls in all. For which (r, b) is there a 50-50 chance that a randomly chosen ball will be either red or blue?

すべての正多面体の決定

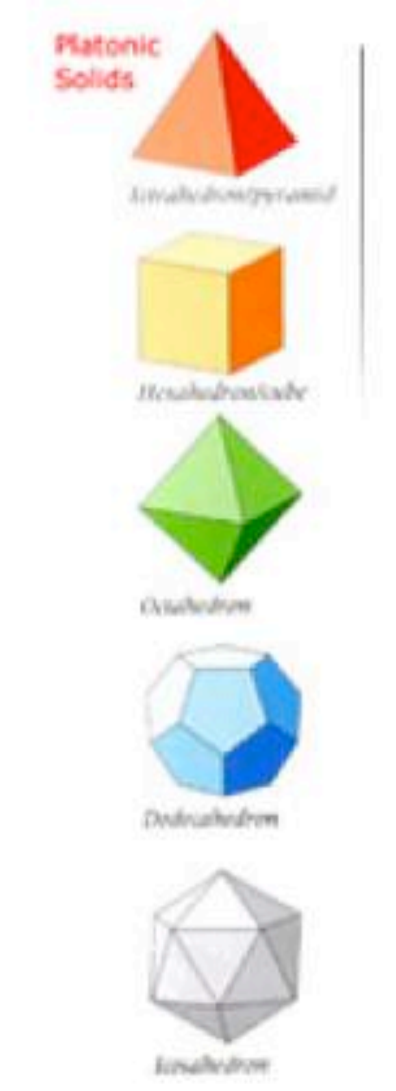
- 規則(組み合わせ論的な)は以下を示す:（？？）

1. すべての面は等しくn(≥3)本の線分を持つ
2. 各頂点で交わる面の数は等しくm(≥3)個である

- ありうる組み合わせ(n, m)を見つけよ
- オイラーの多面体定理: $V - E + F = 2$を用いよ
- 面の数を足しあげ, (1)を使うことでEを数えよ. FをEを用いて表現せよ
- 頂点を足しあげ, (2)を使うことでEを数えよ. VをEを用いて表現せよ
- 結果として出てきた等式を満たす整数の組み合わせを見つけよ

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$

m	n	E	V = (2/m)E	F = (2/n)E	Name
3	3	6	4	4	四面体
3	4	12	8	6	立方体
4	3	12	6	8	八面体
3	5	30	20	12	十二面体
5	3	30	12	20	二十面体



「バックミンスターフラーレン」か「バッキーボール」か

- 以下のような性質の凸面の多面体を形作る特別な種類の炭素分子がある.

1. それぞれの面が五角形か六角形である
2. Three faces meet at each vertex.それぞれの頂点に3つの面がある.

- **Exercise**: Show that, in any Buckeyball,

  the number of pentagons is 12.

練習:任意のバッキーボールにおいて, 五角形の数が12であることを示せ.