

## 第2学年数学科学習指導案

日 時 平成27年6月23日(火) 第6校時  
14:20~15:10  
対 象 第2学年D組 男子20名 女子20名  
計40名  
授業者 東京学芸大学附属小金井中学校  
教諭 柴田翔  
場 所 合同棟大教室(仮)

### 0. 研究のテーマと授業設計の意図

#### 0.1. 研究主題

##### 0.1.1. 研究主題

数学的プロセスの質を高める授業

##### 0.1.2. 研究主題について

今回の授業は東京学芸大学附属中高数学教育研究会の研究の一環である。この研究会は次の目的意識を持っている。それは、我が国の数学教育では、数学の内容(探究した結果)だけでなく数学の問題を探究するプロセスや、そのプロセスで発揮される考え方や能力の育成が重視されてきたにもかかわらず、結局のところ、数学の内容を教えることに偏重してしまっていないかということである。当然、数学の内容を教えることを軽視しているわけではなく、また、内容とプロセスを個々にとらえているわけでもない。しかし、「数学的な見方や考え方」や「数学的活動」が長い間重視されてきた我が国の数学科授業の実態は、果たしてそれらを重視したものになっているのだろうか。

数学のプロセスを重視するとは、数学を使い、創るプロセスを重視するということである。それは活動としては「数学的活動」であるとしてとらえられるし、そのプロセスにおいて発揮される見方・考え方が「数学的な見方・考え方」であるとしてとらえられる。このような考えによって、研究会では、数学を使い、創るプロセスを総称して、「数学的プロセス」と呼び、本研究会の目的を「数学的プロセス」の質を高める授業とはどのようなべきかを追求していくこととし、研究主題を「数学的プロセスの質を高める授業」と設定している。

ここでの「数学的プロセスの質を高める」とは、生徒の学習の質を高めることと同義であると私は考えている。すなわち、数学を使い、創ることは、問題を解決するための接近の方法であり、その質を高めるとは、「よりよい方法はないか」、「この方法を一般化できないか」、「これまでに使った考えを利用することができないか」といった問題解決の営みをより高いものにしていくことであると考える。もちろん、1回の授業においてそれぞれの数学的プロセスの質が必ず高まる訳でなく、狭くは1つの教材の探究を通して、あるいは、1つの単元を通して、さらに広くは学校数学全体を通して高まっていく。

では、「数学的プロセスの質を高める」ためには教師はどのように単元構成を、あるいは授業を設計し、どのような課題を生徒に与え、どのように生徒とかわるべきか。私は、その鍵が問題解決型の授業にあると考えている。問題解決型の授業では、それぞれの自力解決の取り組みを全体で共有し、そこに見られる素朴であったり不完全な形であったりする数学的アイデアや解決の方法を、全体の議論を通して、また必要に応じた教師の支援や手立てを経ることで、洗練された数学的な考え方や技能に昇華していくことができる。最終的な目標は数学を学習した生徒それぞれが、問題を解決するに当たって、授業における他者を内在化し、多様な解決を考え、それらから本質を見だし、さらに発展させていくことができるようになることである。問題解決型の授業を継続的に計画的に設計していくことで、この最終的な目標も達成できると考える。

## 1. 単元名 式の計算

### 2. 単元の目標

- ・ 文字や文字を用いた式を利用し、性質や関係を見出したりすることなどを通して、数学的活動の楽しさや数学的に考えることよさに関心をもち、文字を用いた式を意欲的に、問題の解決や探究に活用しようとする。  
【関心・意欲・態度】
- ・ 事象の数量やその関係・法則などを、文字を用いて表現し、一般的に考え説明することができる。また、文字を用いて表現された式に具体的な数を代入したり、式をよみとったりすることで、式が計算の結果と過程の両方を表すことや、式の表す具体的な事象や関係を考えることができる。【見方や考え方】
- ・ 簡単な整式の加法、減法の計算ができ、単項式の乗除法や、式を操作・処理することができる。また数量の関係や法則を式に表現したり式の意味をよみとったりできる。【技能】
- ・ 文字を用いた式の意味やその意義を理解している。【知識・理解】

### 3. 指導観

小学校において生徒は、例えば  $5 + \square = 8$ 、 $3 \times \triangle = 24$  のように、加法と減法、乗法と除法の関係をとらえるのに  $\square$  や  $\triangle$  を使ったり、例えば、(速さ)  $\times$  (時間) = (道のり) というように、言葉の式を使って数量やその関係を表したり式の意味を読み取ったりする学習をしてきている。また、中学校における文字を用いた式の学習の素地として、数量を表す言葉や  $\square$ 、 $\triangle$  などの代わりに  $a$  や  $x$  などの文字を用いたり、比例・反比例の関係を式でとらえたりすることを学習してきている。そして、例えば、分数の除法の計算方法を考える際に擬変数を用いたり、数の関係や規則を表すために擬変数を用いたりしてきた。

中学校 1 年生では小学校の学習を踏まえ、文字に表したり、その処理したりすることだけでなく、変数としての文字や未知数としての文字、またその集合の代表元としての文字を操作、解釈していくことを学習してきた。また、単に文字を導入し、計算していくのではなく、数でありながら変数のように振る舞う数(擬変数)の考察から始め、式の表す意味やその構造などをよみとったり、一般化したりすることによって、文字を導入した。

中学校 2 年生においては、扱う文字の数が増えたことによってより多くの事象を考察できる。それと共に、2 つ以上の変数が出てきた際に、それらの変数はどのような関係にあるのかを注意深く考える必要がある。例えば、「2 つの連続する偶数の和は偶数である」という命題の説明を考える際に、それぞれの偶数を、整数  $n$  を使って、 $(2n, 2n+2)$  と表すか、整数  $n$  と  $m$  を使って  $(2m, 2n)$  と表すか、生徒は考える必要がある。 $(2n, 2n+2)$  と表す場合が模範解答ではあるが、 $(2m, 2n)$  の方がより条件を緩めたものであるため、命題が成立することの証明としては、誤答ではない。一方で、2 つの連続する偶数の和はその間の奇数の 2 倍になっていることは、 $(2n, 2n+2)$  と表すことによって式からよみ取ることができる。これらのことは文字式の規約の理解だけでなく、文字式あるいは文字そのものの理解をより高次に引き上げる機会となる。その結果、これまで以上に、様々な事象を数学の世界における関係として記述することができ、表された式を新たに表現し直し、新たな解釈を得ることができる。また、自身の解決に対して、より批判的な反省を行い、記述を洗練させたり、解決を基に発展的な学習を行っていくことができると考えている。

### 4. 生徒観

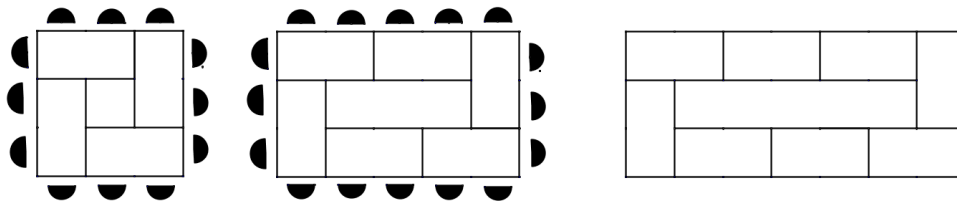
生徒は昨年度、文字式の計算、1 次方程式、比例と反比例を学習してきている。そこでは、文字を用いて変化を探ったり、一般化を試みたり、関数に表したり、未知数を求める活動を行ってきた。授業の中では「考えるべきこと」「考えた観点」など自身の問題解決の過程を意識する指導を心がけてきた。今年度はこれまでに、倍数の判定法や整数の性質などの探究を通して、事実の発見から文字を用いた説明をセットにして学習を行ってきた。

数学に対して、苦手意識は持っていないが、「説明すること」に困難を感じている生徒もいる。しかし、分か

らない生徒の疑問を解決することで、数学的な理解が深まることを経験してきており、クラスの中で分からないことを分からないと言える学級文化が根付いてきたと感じている。発表する生徒が多く、また、素朴な意見も出てくる学級である。

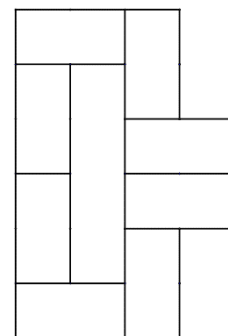
### 5. 教材観

本教材は、下図のように机を並べていった際に、人数から必要な机の数を求めるものである。



本教材の価値は3つの変数がそれぞれに関わりあっていることである。3つの変数とはすなわち、机の数、座る人の数、そして、問題には表れない何番目の図かという3つである。この価値を顕在化させるのは、机の数と人数の関係を考える際に、それらの関係を直接見いだすことが困難なことである。机1つにつき、2人座り、机の数に関係なく机の短い辺に合わせて4人が座るという関係を見いだすことができれば、机の数と人数の関係を直接、式に表すことはできる。しかし生徒の中には、「1番目の机の置き方では、机は4つ、人は12人、2番目の置き方では」というように示されていない変数を見いだし解決に進む生徒もいるはずである。この際に机の数も人数も、何番目という数の関数であり、共に変わる2つの数を、それをコントロールしやすい変数で置き換えて考えていることに他ならない。

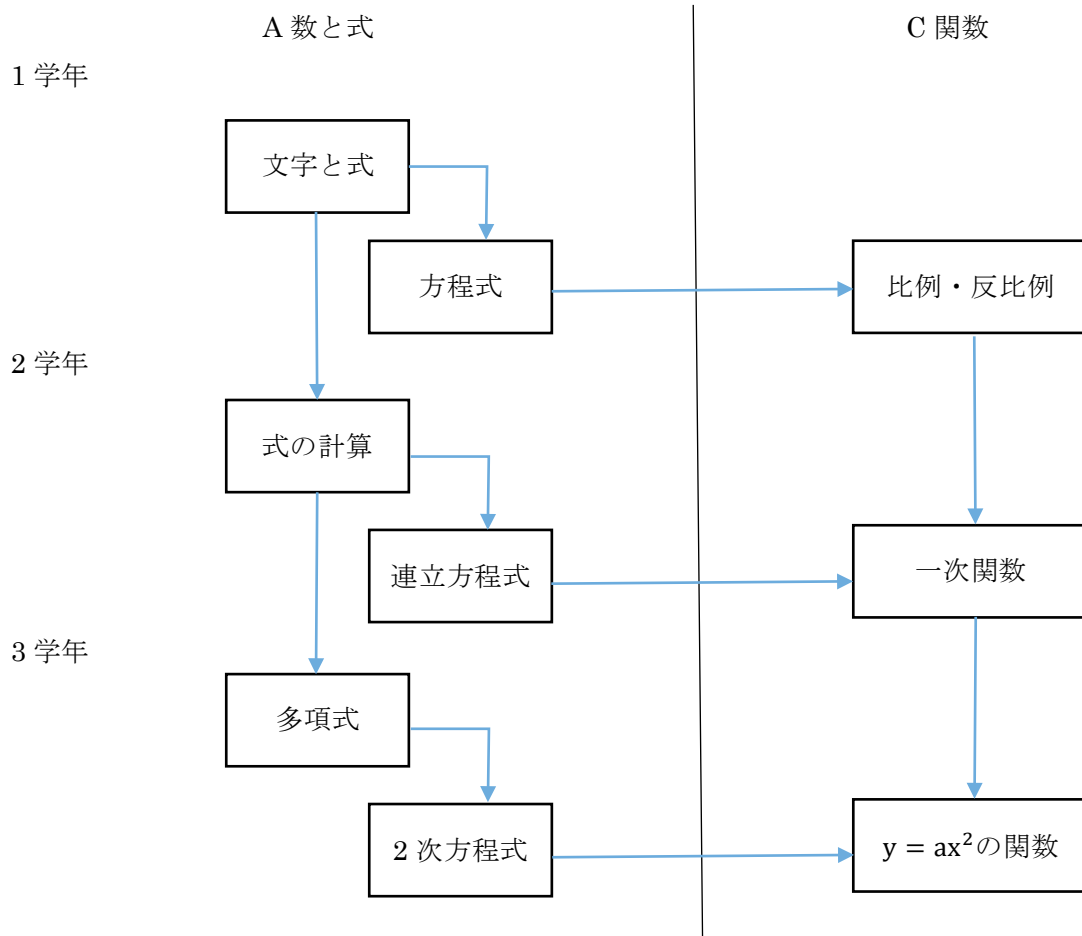
また、この教材の興味深い点は、机の並べ方にかかわらず、座れる人数が決まることである。つまり、8つの机を用いた場合に上の図のように横長に並べても、正方形に近い形で並べても、その周りに座ることのできる人数は20人で変わらないのである。右図のように変な形に並べたとしても(短い辺が長い辺の半分の長さでなければ並べることができないが)、同様に20人である。



解決の発表及び、練り上げでは、机の数と人数の関係を直接求めようとする生徒の考えと、何番目という変数を見いだし間接的に求めようとする生徒の考えを比較・検討し、それぞれの用いた式に着目することになる。そこで、机の数( $t$ )と人数( $p$ )の関係式 $p = 2t + 4$ と、何番目(サイズ:  $s$ )を用いた $t = 2s + 2$ と $p = 4s + 8$ がどのような関係にあるか探ることで、それぞれの文字に文字式を代入することなどを通して、それぞれの式が同じことを違う変数を用いて表していたことに気づいていくことになる。

中学校において、文字に式を代入することは、連立方程式の代入法の指導においてであり、それまでの学習では指導されない。しかしながら、規則性などを考えている際にそれぞれの変数が共通の独立変数によって定められていることに気づくことがあり、それをきっかけに問題の解決が進んだり、その問題の理解が深まったりすることがある。このような考えは文字の指導において重要であり、連立方程式の解法のために扱われるだけでなく、内容としてしっかりと考えていく必要があると感じている。この教材は上に述べたように、何と何の関係に着目したかによって、それぞれの解決は変わってくるはずである。これらを比較し、文字に式を代入する活動を経験することによって、連立方程式の代入法の指導が容易になるだけでなく、今後の生徒の数学の学習や探究において、文字を用いた創造的、発展的な活動ができるようになると筆者は考えている。

## 6. 指導計画における位置づけ

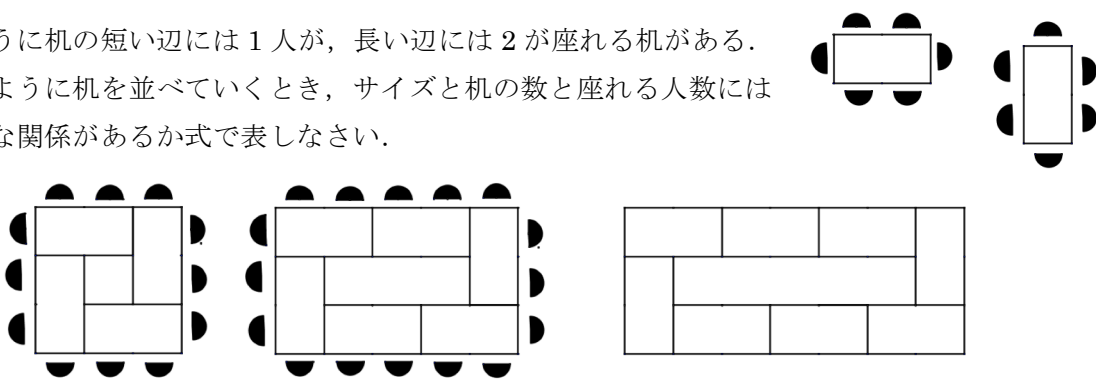


## 7. 単元の指導計画

### 8. 本時

#### (1) 目標

- 等式同士の関係を理解して、それを基に他の等式について考えることができる。【見方・考え方】
- 数量やその関係・法則について考え、サイズと机の数と座れる人数の間にある数量の関係を考えようとする。【関・意・態】

分	主な学習活動	予想される生徒の反応	※指導上の留意点 ◇質を高めるための手立て ○評価																									
	<p>【導入】</p>	<p>課題</p> <p>右図のように机の短い辺には1人が、長い辺には2が座れる机がある。</p> <p>下の図のように机を並べていくとき、サイズと机の数と座れる人数にはどのような関係があるか式で表しなさい。</p> 																										
		<ul style="list-style-type: none"> <li>・横に伸びていくだけですか。</li> </ul>	<p>ために、図は印刷したものを掲示する。</p>																									
	<p>【展開】</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・自力解決</li> </ul>	<p>(サイズを <math>s</math>、机の数を <math>t</math>、人の数を <math>p</math> で表す。)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>・表を利用して増え方を調べる。</li> </ul> <table border="1" data-bbox="443 1489 1050 1668"> <tr> <td>サイズ</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>机の数</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>人</td> <td>12</td> <td>16</td> <td>20</td> <td>24</td> </tr> </table> <p>机の数は2つずつ増えている。人の数は4人ずつ増えている。サイズ1のときの机の数と人数は4つと12人だから</p> $t = 4 + 2(s - 1)$ $p = 12 + 4(s - 1)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>・表を利用して成立する式を考える。</li> </ul> <table border="1" data-bbox="443 2020 1050 2112"> <tr> <td>サイズ</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>机の数</td> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>10</td> </tr> </table>	サイズ	1	2	3	4	机の数	4	6	8	10	人	12	16	20	24	サイズ	1	2	3	4	机の数	4	6	8	10	<ul style="list-style-type: none"> <li>○数量やその関係・法則について考え、サイズと机の数と座れる人数の間にある数量の関係を考えようとする。</li> </ul> <p>【関・意・態】</p>
サイズ	1	2	3	4																								
机の数	4	6	8	10																								
人	12	16	20	24																								
サイズ	1	2	3	4																								
机の数	4	6	8	10																								

人	12	16	20	24
---	----	----	----	----

机の数は2つずつ増えているから $2s$ . 人の数は4人ずつ増えているから $4t$ になっているはず.

サイズ3のときで考えると,

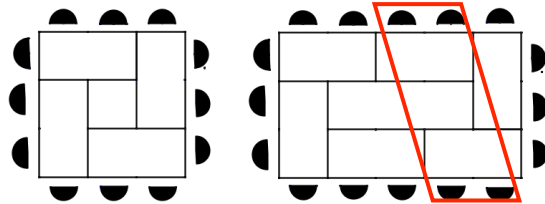
机の数は8だから $8 = 2 \times 3 + \bullet$ で $\bullet$ は2

人の数は20だから $20 = 4 \times 3 + \blacktriangle$ で $\blacktriangle$ は8になっているはずだから,

$$t = 2s + 2$$

$$p = 4s + 8$$

・増えている机と人に着目する.

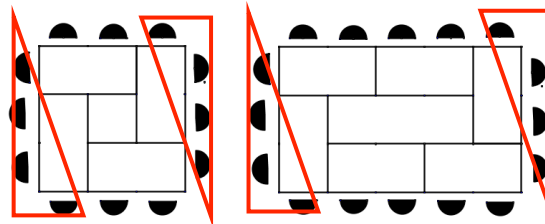


1つサイズが増えるごとに机が2つ, 人が4人増える(赤で囲まれた部分).

$$t = 2(s - 1) + 4$$

$$p = 4(s - 1) + 12$$

・変わらない人に着目する.

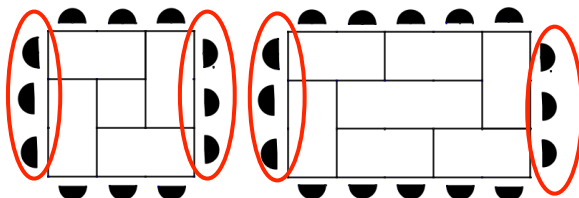


変わらない人数は4人が2組(赤で囲まれた部分)

増えている人数は上下で2人ずつ  $2 \times 2(s - 1)$

$$p = 4 \times 2 + 2 \times 2(s - 1)$$

・縦と横に分けて考える.



縦にある机: 1個で一定(赤で囲まれた部分) 1個

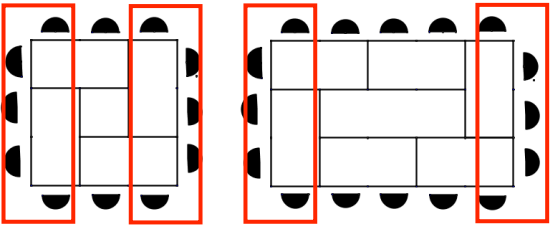
横にある机: サイズが増えるごとに1つ増える.

$s$ 個

合計:  $(1 \times 2 + s \times 2)$ 個

縦に座る人: 3人で一定(赤で囲まれた部分) 3人

横に座る人: サイズが増えるごとに2人増える.

	<p>【自力解決の発表】</p>	<p style="text-align: center;"><math>(1 + 2s)</math>人</p> <p>合計：<math>(3 \times 2 + (1 + 2s) \times 2)</math>人</p> <p>・縦と横に分けて考える。(別の数え方で)</p>  <p>縦にある机：2個で一定(赤で囲まれた部分) 2個 横にある机：サイズが増えるごとに1つ増える。 <math>(s - 1)</math>個 合計：<math>(2 \times 2 + (s - 1) \times 2)</math>個</p> <p>縦に座る人：5人で一定(赤で囲まれた部分) 5人 横に座る人：サイズが増えるごとに2人増える。 <math>(1 + 2(s - 1))</math>人 合計：<math>(5 \times 2 + (1 + 2(s - 1)) \times 2)</math>人</p> <p>・机の数を何らかの方法で求めたあと、机の長い辺に座る人数に着目して人数をもとめる。</p> <p><math>t = 2s + 2</math> 1つの机の長い辺に2人ずつ座る。短い辺には角の4人だけ。 <math>p = 2t + 4</math> この式に<math>t = 2s + 2</math>を代入して、 <math display="block">p = 2(2s + 2) + 4</math></p>	<p>※発表の中で「○○くんの意見に似ているけど」「意見と違うけど」というような発言があったら、どこが似ているのか似ていないのかを聞き式と図の対応について考えさせる。 ※乗数と被乗数については、分けて考える。 ◦多様な式の比較</p>
	<p>【展開②】</p>	<p><b>数学的プロセスの質を高める手立て</b></p> <p>「机の数と人数に着目して、それ利用してサイズと人数の式をつくることはできませんか。」</p>	
		<p>・机の長い辺に座る人数に着目する。 1つの机の長い辺に2人ずつ座る。短い辺には角の4人だけ。 <math display="block">p = 2t + 4</math></p> <p>・机と人の増加の関係に着目する。 机が1つ増えるごとに人は2人増える。最初に机は4つあり、人は12人いるから <math>p = 12 + 2(t - 4)</math></p> <p>・<math>t = 2s + 2</math>を変形し、<math>p = 4s + 8</math>に代入する。</p>	<p>◦文字の関係への着目 ○等式同士の関係を理解して、それを基に他の等式について考えることができる。 <b>【見方・考え方】</b> ※等式を他の等式に代入することで、違う関係を見ることができていることを確認する。</p>

		$t = 2s + 2$ より $s = \frac{t-2}{2}$ . これを $p = 4s + 8$ に代入して、 $p = \frac{4(t-2)}{2} + 8 = 2(t-2) + 8$	
	<b>【まとめ】</b> 「自分の考えと違ったのはどこですか。」	<ul style="list-style-type: none"> <li>・色々な関係を考えることができただけでなく、それぞれ別に考えていた机の数と人の数の関係まで考えることができた.</li> <li>・2つの式から新たな式を作ることによって新たな関係が見いだすことができた.</li> </ul>	