

**数学科 公開授業Ⅱ**  
**数学的モデルとしての微分方程式を生み出す授業**  
**学 習 指 導 案**

日時 平成 26 年 6 月 21 日（土曜日）11:10-12:00

対象 東京学芸大学附属国際中等教育学校 6 年

数学 6αR クラス 15 名(男 8 名, 女 7 名)

授業者 教諭 小林 廉

### 1. 本研究授業上の問い

本時は、本校第 5・6 学年における目標の一つである「現実の問題を解決するために、定式化、処理、解釈・評価のプロセスを遂行することができる」ことを目的とした授業の一環であり、特に次のプロセスを遂行できる力の育成に焦点化するものである。それは、「現実の問題を解決するために、数学的モデルとして微分方程式に定式化し、処理し、解釈・評価する」プロセスである。初めてその活動を行うことになる本時では、数学的モデルとして微分方程式を用いて現実の問題を解決するという発想を獲得すること、そして改めて数学的モデル化のプロセスおよびそれを遂行するに当たって必要となる考え方を実感することが目標である。実用的価値の高い微分方程式を数学的モデルとして用いる経験は、数学教育の実用的目的に応えるものであると考える。

とりわけ、本時では微分方程式とその使い方を「説明する」授業ではなく、数学的モデルとしての微分方程式を生徒たちが「生み出す」授業を実現したい。なぜなら、現象を探究しながら微分方程式を生み出すことで、どんな状況において微分方程式が有効であるのかということや、微分方程式自身の意味が実感されることを期待できるからである。

それでは、数学的モデルとしての微分方程式を生み出す授業とはどのようなものであるべきか。微分方程式は変化自身を記述する数式である。そこでは、問題解決者が変化の状態について仮定をおく必要が生ずる。変化の状態について仮定をおき、その変化自身を記述するという発想はいかにして生み出されるのだろうか。授業者は、生徒たちがその発想を生み出すためにどのような手立てを講ずる必要があるのだろうか。これが本研究授業上の問いである。この問いに対して、教材に即した具体的な手立ては後述するが、基本的な方針として以下の三点を手立てとして据えたい。

- ・手立て①：活動を促す手立てとしての探究課題への問いの埋め込み
- ・手立て②：活動を発展させる手立てとしての活動の振り返り
- ・手立て③：生徒たちが探究の道具として利用できる数学の内容としての「数列」の利用

手立て①と②はどの授業においても講ずる手立てであるが、③は微分方程式を生み出すことを意図しているからこそその手立てである。生徒たちは単元「数列」において、変化を漸化式に定式化して探究する方法を学習してきている。これを踏まえて本時では、漸化式を差分方程式として見直すことで、隣接二項間の差という変化自身を記述しているという見方をできるようにしたい。もちろん、差分方程式自体有効なツールであるが、ここでは、離散的变化から連続的变化へと促すことによって、微分方程式が生み出されることを期待する。

これを図1「水準を高める授業の構造」の枠組みで整理する。本時では、現象における変化を既習事項である漸化式で表現する水準から、生み出す対象である微分方程式で表現する水準へと高めることを意図する。そのためにまず、漸化式で表現することのできる（逐次的変化となる）現実の問題を用意する（手立て①）。これを生徒たちが漸化式に表現して処理した後、漸化式を差分方程式として見直す（手立て③②）。さらに、離散的变化ではなく連続的变化をみる必要性のある現実の問題にしておくことで（手立て①）、単位時間を縮めていくことを議論し、微分方程式を用いる水準へと高めたい。

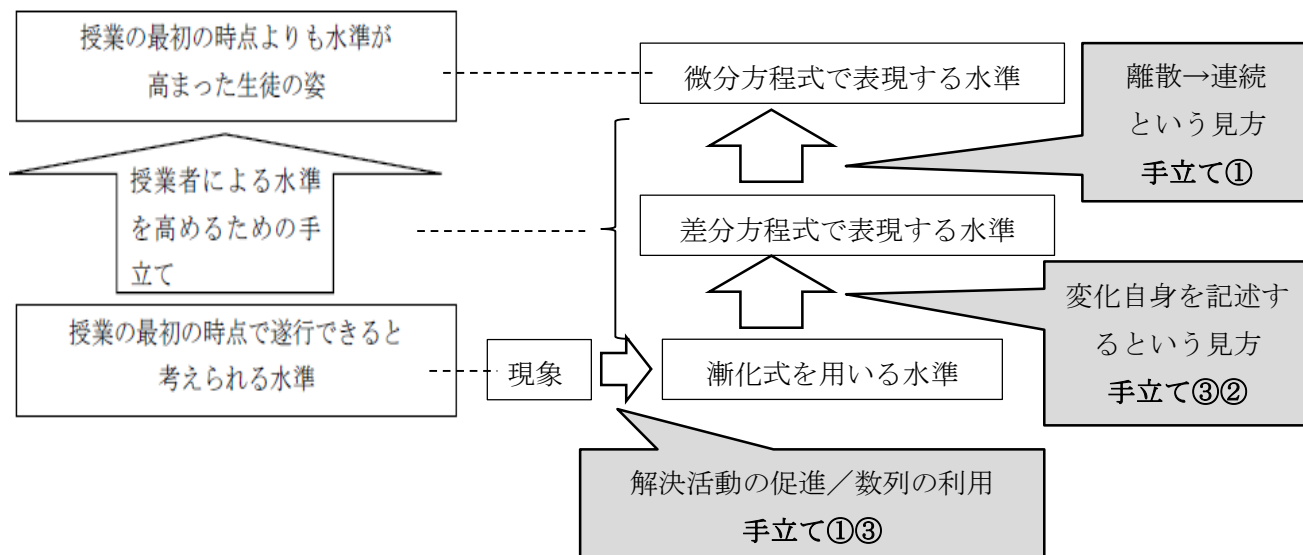


図1 本授業における水準を高める授業の構造

特に本時では、具体的な教材に即して、漸化式を差分方程式として見直すための手立てと、差分方程式から微分方程式へと発展するための手立てを明示化し、それが機能するかを検証する。

## 2. 本時の教材について

### (1) 探究課題と差分方程式・微分方程式

本時では、感染症の数理モデルとして最も古典的・基本的であると言われる「SIR モデル」を題材として、生徒たちに以下の探究課題を提示する（SIR モデルの理論的背景に関しては本公開研究会冊子を参照）。

ある感染症にかかっている1人が、総人数が10万人である集団に入り込んだとする。この感染症は、感染者と接触した未感染者のうち1.8%の人が感染する感染力をもち、感染者が感染力を有する期間は1週間であるという。また、感染力を失った（回復した）人はこの感染症に対する免疫を獲得するとする。

あなたはこの集団における公衆衛生の責任者であり、この感染症の流行を予期して予防接種を促したい立場であるとする。調べてみたところ、この集団では1人が1週間で延べ平均70人と接触することがわかった。

(1) 何も対策をしないときの、週ごとの感染者数の変化をシミュレーションしよう。

(2) 副作用のリスクを考えると集団全員に予防接種を義務付けるのは効果的ではない。感染症の流行を防ぐには、10万人中少なくとも何%の人が予防接種を受けておくべきかを決定しよう。

図2 本授業における探究課題「感染症の流行予防」

この探究課題は次のようにして漸化式に定式化される。  $n$  週目における、まだ感染していないが感染する可能性のある人口（感受性人口）を  $S_n$ ，感染していてかつ感染力のある人口（感染人口）を  $I_n$ ，病気からの回復による免疫保持者ないし隔離者・死亡者人口（隔離人口）を  $R_n$  とする。また総人口は  $S_n + I_n + R_n = N$  で一定であるとする。新規感染人口は感受性人口から生じ、また感染人口から新規隔離人口が生じると考えると、様々な仮定をおく必要があるが、次のように連立漸化式に表現できる。

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 \\ I_{n+1} = I_n + S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 - I_n \\ R_{n+1} = R_n + I_n \end{cases} \quad \cdots(2.1)$$

この漸化式に基づいてシミュレートした結果のグラフが次の図である。

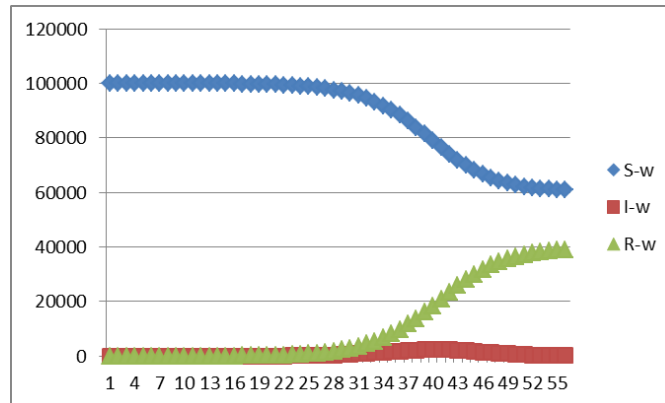


図3 シミュレーション結果

漸化式(2.1)をそれぞれ「週当たりの人口増加数」として見直せば、

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 \\ I_{n+1} - I_n = S_n \times (I_n / N) \times 70 \times 0.018 - I_n \\ R_{n+1} - R_n = I_n \end{cases} \quad \cdots(2.2)$$

と差分方程式の形になる。そこで「週当たり」という時間間隔を小さくしていき、差分間隔を1日したうえで、さらに間隔を0に限りなく近づけていくときの極限を考えると、次の微分方程式が定式化される。

$$\begin{cases} dS(t)/dt = -S(t) \times (I(t) / N) \times 10 \times 0.018 \\ dI(t)/dt = S \times (I(t) / N) \times 10 \times 0.018 - (1/7)I(t) \\ dR(t)/dt = (1/7)I(t) \end{cases}$$

さらに、流行初期は  $S \approx N$  であるとすれば、この第2式は

$$\begin{aligned} dI(t)/dt &= N \times (I(t) / N) \times 10 \times 0.018 - (1/7)I(t) \\ &\approx 0.037I(t) \end{aligned}$$

となり、これは  $I(0)=1$  という条件のもと、 $I(t) = e^{0.037t}$  と解くことができる。

## (2) 教材観

感染症の数理モデルである SIR モデルの教材化は、次の三点の理由で本公開授業の趣旨に合致していると考えている。

まず、本探究課題において感染者人口をシミュレーションするにあたっては、感染者人口 (I) だけでなく、少なくとも感受性人口 (S) を考慮する必要性が生ずる。そうすると、感受性人口から感染者人口への移動といったように、感染者人口の単位時間当たりの変化を考える必然性があり、それが何らかの形で表現されることを期待できる。そこでその変化自身に焦点をあて、表現を洗練していくことで、差分方程式・微分方程式が生み出されることを想定できる。

次に、感染症の流行初期を考察することで、線形 1 階微分方程式  $dy/dt = ky$  が生ずることである。この形の微分方程式は、非常に簡潔で解くことも簡単でありながら、いくつかの現象を記述することができるものである。この微分方程式を知っておくこと自体が有効である。そしてそのような微分方程式であるからこそ、 $dy/dt = ky$  で記述されるような他の現象の探究を評価課題として課すことで、目標が達成されたかどうかを評価することができる。評価については後述する。

最後に、微分方程式の実用性を実感できる題材であると考えられることである。微分方程式が用いられている実例であり、感染症の流行を防ぐためにその様子を数学的に記述したいという、微分方程式が有効に働くことを実感できる題材であると考ええる。

## (3) 本教材の指導計画

微分方程式は、数学Ⅲの検定教科書において最後の方で発展として扱われている。それは「微分方程式を解く」ことまで話題としているからであるが、本時の趣旨は「微分方程式を解く」ことではなく、数学的モデルとしての「微分方程式に表す」ことにある。本教材は、「微分法の応用」の一つとして位置付ける。即ち、数学Ⅲにおける微分法が既習事項である。

本教材は全 4 時間で指導を行う。本時は第 3 時に該当する。第 3 時までには、連立漸化式(2.1)がつくられ、さらに(2.1)の第 2 式において、流行初期は  $S_n \approx N$  であることから  $I_{n+1} = 1.26I_n$  となり、感染者数  $I_n$  は等比数列（離散的指数関数）に従って増加するところまで考察されている想定である。

表 1 本教材の指導計画

| 時数        | 生徒の主たる活動                        | 主たる目標                              |
|-----------|---------------------------------|------------------------------------|
| 第 1 時     | グループによる課題(1)の自力解決               | 現象を漸化式に表現し、その変化をシミュレーションすることができる。  |
| 第 2 時     | 自力解決の発表・共有<br>流行初期の変化の考察（離散）    | 漸化式を利用して変化を数学的に特徴づけることができる         |
| 第 3 時（本時） | 漸化式を差分方程式と見直す<br>流行初期の変化の考察（連続） | 微分方程式を生み出し、現象における変化の状態を記述することができる。 |
| 第 4 時     | 閾値の考察から予防接種率を求め                 | 数学的モデル化のプロセスを理解することができる。           |

#### (4) 数学的モデルとしての微分方程式を生み出す具体的な手立て

本教材に即した具体的な手立てのうち、本時(第3時)において主となる二点を次のように設定する。

手立て 3-①：感染者数の週当たりの増加数についてわかることを問う。

目的 3-①：漸化式を見直して差分方程式を生み出すため

予防対策のためのシミュレーションの一環として、流行初期における週当たりの増加数を調べさせる。感染者数ではなく、その増加数についてわかることを問うことによって、週当たりの変化それ自身に目を向けさせる。様々な調べ方が想定されるが、最終的には連立漸化式(2.1)の第2式(ただし  $S_n \approx N$ ) を根拠として、「週当たりの感染者増加数とその週始めの感染者数に比例する」ことを見出させたい。

手立て 3-②：1週間あたりではなくもっと短い時間単位において刻々と変化する感染者の変化を調べられないか問う。

目的 3-②：差分方程式から微分方程式を生み出すため

週ごとの感染者数のシミュレーションに基づいては、予防対策もあくまで週ごとにしか講ずることができない。そこで、理想的には限りなく小さな時間単位における感染者数の変化を調べられると良いとして、それができないか問う。実際には、感染者数は少なくとも1日単位で変化しているのを観測できるとして、1日当たりの変化率をもって瞬間変化率を近似することになる。

### 3. 生徒観と学習歴

数学6α(数学Ⅲ)習熟度別上位クラスに属する生徒たちであり、それなりに力のある生徒たちである。これまで、文脈に埋め込まれた現象を探究する経験を重ねてきており、まずは自力で考える姿勢が十分に身についている。面白い、解いてみたいと思う問題に対しては非常に熱心に問題解決に取り組む。また、授業者が全体に問いを発すると、特に挙手を促さなくても、積極的に発言する生徒が数名見られる。他人の発言や説明に対して真摯に向き合うことができる。さらに、この学年の生徒は探究の振り返りをしっかりと記述できることが特徴である。

なお、対象クラス15名中8名が、昨年度の5月に実施された総合的学習の時間の一環で、計2時間、生物個体数の変化をシミュレーションした経験を有している。そこでは数列を利用して、羊の頭数の1年あたりの増加数が全体の頭数に比例するという見方(離散マルサスモデル)、また、全体の頭数と当該の環境においてまだ生存できる頭数の積に比例するという見方(離散ロジスティックモデル)をした。ただし差分という見方はしていないし、微分は未習であったため全くそうした眼ではみていない。したがってあくまで1年あたりの増加数という扱いであり、それを単位時間当たりの変化率とはみていない。この経験が本教材においてどう働くかが未知数である。当該の8名をバランスよくグループに分けることを考えている。

#### 4. 評価の計画

本教材の指導計画に基づく一連の授業を終えたのち、本公開研究会冊子に載せた評価課題「炭素 14 年代測定法」を用いて、生徒個々の「現実の問題を解決するために、数学的モデルとして微分方程式に定式化し、処理し、解釈・評価する」プロセスを評価する。評価規準は次のとおりである。

表 2 評価規準 観点 B. プロセスと振り返り (B1)

|     |   |
|-----|---|
| 0   | 以下のいずれにも達していない。   |
| 1-2 | 現実の問題を微分方程式に記述している。   |
| 3-4 | 現実の問題を微分方程式に記述し、適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができる。                             |
| 5-6 | 現実の問題を微分方程式に記述し、適切な数学的処理に基づいて結論を導くことができ、解決過程および結論について振り返り、評価することができる。 |

なお、本時において生徒たちの集団としての活動の水準が高まったかどうかは、生徒たちのワークシートを回収し、また発言を記録することによって、それらを証拠として評価する。

#### 5. 本時案

##### (1) 本時の目標

数学的モデルとしての微分方程式を生み出し、現象における変化の状態を微分方程式に定式化する。

##### (2) 本時の展開 (略案) ※T は教師の問い、S は生徒の反応、●は手立て

| 時間 | 指導内容・主な発問と予想される生徒の反応  | 留意点  |
|----|---|--|
| 5  | <p><b>1. 前時の振り返りと新たな課題提示</b></p> <p>T0: 前時までに、流行初期における週ごとの感染者数の変化は、等比数列 (離散的指数関数) になることがわかった。</p> <p>T1: 流行を予防するには、週当たりの感染者増加数を小さくする必要がある。いまのシミュレーションの流行初期において、週当たりの感染者増加数についてわかることは何だろうか。</p>  | 週当たりの増加数を調べる必要性がわかるように問う。  |
| 10 | <p><b>2. グループでの自力解決</b></p> <p>S1-1: 数値で分析…週当たりの増加数を具体的に求め、その差や比を調べる。</p> <p>S1-2: グラフで分析…週当たりの増加数を具体的に求め、プロットしたグラフの形状から変化を予想する。</p> <p>S1-3: 一般項で分析…前時で求めた一般項 <math>I_n = 1.26^{n-1}</math> を用いて <math>I_{n+1} - I_n</math> をつくる。</p> <p>S1-4: 漸化式で分析…前時で求めた <math>I_{n+1} = 1.26I_n \cdots \textcircled{1}</math> を用いて <math>I_{n+1} - I_n</math> をつくる。</p> <p>●S1-4 の反応が現れない時は、漸化式を用いることはできないか問う</p> <p>S1-5: 等比数列で変化する / 感染者数の変化と似ている</p> <p>S1-6: 週始めの感染者数の 0.26 倍である</p> <p>S1-7: 週始めの感染者数に比例する (<math>I_{n+1} - I_n = 0.26I_n \cdots \textcircled{2}</math>)</p> <p>●S1-7 の反応が現れない時は、増加数 (<math>I_{n+1} - I_n</math>) と感染者数 (<math>I_n</math>) の関数関係を問う。</p> | ある程度時間が経過したところで、S1-4 (いなければ S1-3) のように式で解釈しているグループを必ず指名し、わかることをきく。 |

|    |  |   |
|----|--|---|
| 10 | <p><b>3. 練り上げ</b></p> <p>T2: 「週当たりの増加数とその週始めの感染者数に比例する」ということは、週始めの感染者数が2倍、3倍、…になれば感染者増加数はどうなるか。<br/>S2: 2倍、3倍、…になる。</p> <p>T3: 逆に、週当たりの増加数とその週始めの感染者数に比例するという仮定をおくとき、<math>I_n</math>が等比数列になることを確かめよう。<br/>S3: <math>I_{n+1} - I_n = aI_n</math>ならば<math>I_{n+1} = (1+a)I_n</math>であるから等比数列。</p> <p>T4: いまの問題状況において「週当たりの増加数とその週始めの感染者数に比例する」という仮定をおけば、前時で求めた<math>I_n</math>が等比数列になるという結果を得ることができる。</p>   | <p>週当たりの増加数とその週始めの感染者数に比例するという意味を解釈する。<br/><math>I_n</math>ではなく週当たりの増加数<math>I_{n+1} - I_n</math>に着目した仮定であること、それをおくことで<math>I_n</math>の変化を調べられることを強調する。</p>                                   |
| 20 | <p><b>4. さらなる探究</b></p> <p>T5: 1週間ごとの感染者数の変化を調べてきたが、予防策をできるだけ正確にするため、刻々と変化する感染者数の変化を調べたい。どうしたらよいだろうか。<br/>S4: 「1週間ごと」をもっと短い時間にして調べる。</p> <p>T6: 理想的にはどんな時間単位で調べられると良いだろうか?<br/>S6-1: 瞬間の感染者数がわかればグラフが連続になる。<br/>S6-2: 人数の変化なのに瞬間まで考える必要があるのか?<br/>S6-3: 実際は1日当たりの感染者数しかわからないと思う。<br/>S6-4: 1日当たりの感染者数がわかれば十分だと思う。</p> <p>●「連続」や「瞬間」というキーワードが発言されないときは、<math>I_n</math>が<math>n</math>週の関数であり離散的であったことを振り返り、理想的には時間<math>t</math>の関数と考えることができないかを問う。</p> <p>T7: まず、流行初期における1日当たりの感染者数の変化を調べよう。漸化式はどう変更されるだろうか。<br/>7-1: 接触回数は10回でいいと思う。<br/>S7-2: 感染する未感染者の割合は変わらないと思う。<br/>S7-3: 今度は第<math>n</math>日時点での感染者数を<math>I_n</math>とすると、</p> $I_{n+1} = I_n + N \times \frac{I_n}{N} \times 10 \times 0.018 - (1/7)I_n \doteq 1.037I_n \cdots \textcircled{3}$ <p>T8: さらに、時間<math>t</math>の関数<math>I(t)</math>として連続的な変化を調べるにはどうしたらいいだろうか。<br/>S8-1: 1日単位ではなくてもっと間隔を小さくすればいい。<br/>S8-2: 1時間単位も考えられると思う。<br/>S8-3: 間隔を<math>h</math>や<math>\Delta t</math>で表して0に限りなく近づければいいのでは。<br/>S8-4: 瞬間的な増加数とその時点での感染者数に比例するとみればよいのではないか。</p> | <p>グラフが点プロットであり間が空いていることを強調する。</p> <p>瞬間的な変化はあくまでも理想的な状況であることを確認する。<br/>指数関数になることが予想される。<br/>条件を確認する。<br/>「1日当たりの感染者増加数もまた、その日の感染者数に比例する」として確認する。</p> <p>議論が進まないようであれば一度グループで議論する時間を確保する。</p> |

|   |   |   |
|---|---|---|
|   | <p>●S8-3 の反応が現れないときは、間隔（増分）を限りなく 0 に近づける経験を既にしてきていること、それをどのように表現してきたかを問う。</p> <p>T9：漸化式③をもとにして、<math>\Delta t &lt; 1</math> としたとき、<math>I(t + \Delta t)</math> と <math>I(t)</math> の関係を式に表し、<math>\Delta t \rightarrow 0</math> を考えてみよう。</p> <p>S9-1：<math display="block">I(t + \Delta t) = I(t) + N \times \frac{I(t)}{N} \times 10 \Delta t \times 0.018 - (1/7) \Delta t I(t) \cdots \textcircled{4}</math></p> <p><math>I(t)</math> を移項して <math>\Delta t</math> で両辺をわって <math>\Delta t \rightarrow 0</math> とすると、<br/> <math display="block">dI(t)/dt = 0.037I(t)</math></p> <p>S9-2：瞬間的な感染者増加数もまた、その時点での感染者数に比例すると仮定すると、<math>dI(t)/dt = 0.037I(t)</math></p> <p>●S9-1 の反応が現れない時、③式の左辺 <math>I_{n+1} - I_n</math> を、1 日間の平均変化率と見直し、瞬間的な増加数ではどうなるかを問う。</p> <p>●上記 T8 に対して S8-4 の反応が現れずとも、④式に対しては S9-2 のような解釈を必ず行う。</p> | <p>S8-4 の反応が現れるのが理想であるが、現れない場合は S8-3 のような反応を活かして進める。</p> <p>1 日単位の漸化式ではなく 1 時間単位の漸化式に表現したグループがあれば、それに対して <math>\Delta t</math> を考えてもよい。</p> |
| 5 | <p><b>5. まとめと次時の課題</b></p> <p>T9：「感染者数の変化率が感染者数に比例する」という仮定を数学的に表現すると、<math>dI(t)/dt = aI(t)</math> である。この問題状況では <math>dI(t)/dt = 0.037I(t)</math> と表現することができた。つまり <math>I(t)</math> は微分すると自分自身の（約）0.037 倍になる関数である。次の時間はこの等式を満たす関数を求めよう。</p>   | <p>「微分方程式」と名付けるのは一連の探究を終える次時に行う。</p>  |



## 感染症の流行を防ごう

ある感染症にかかっている 1 人が、総人数が 10 万人である集団に入り込んだとする。この感染症は、感染者と接触した未感染者のうち 1.8%の人が感染する感染力をもち、感染者が感染力を有する期間は 1 週間であるという。また、感染力を失った（回復した）人はこの感染症に対する免疫を獲得するとする。

あなたはこの集団における公衆衛生の責任者であり、この感染症の流行を予期して予防接種を促したい立場であるとする。調べてみたところ、この集団では 1 人が 1 週間で延べ平均 70 人と接触することがわかった。

- (1) 何も対策をしないときの、週ごとの感染者数の変化をシミュレーションしよう。
- (2) 副作用のリスクを考えると集団全員に予防接種を義務付けるのは効果的ではない。感染症の流行を防ぐには、10 万人中少なくとも何%の人が予防接種を受けておくべきかを決定しよう。